« POURQUOI FAIRE SIMPLE... etc... »
2. Recherches collectives en mathématiques – a) fonction affine
Jean-marc Guerrien

Dans un précédent article (« L'octogone de Boris », voir CH'TI QUI n° 2 de l'année scolaire 2012-13), j'avais précisé que quatre « moments » relevaient dans ma classe du travail mathématique :
- l'entretien, où sont systématiquement débusquées, par les élèves eux-mêmes, les pistes mathématiques (au même titre que toutes les autres, dans le double but de générer des pistes de travail, bien sûr, mais aussi d'affiner la conscience disciplinaire) ;
- la plage de travail personnel où prennent place les recherches individuelles (que l'on nomme « inventions »), et les entraînements consécutifs aux temps collectifs. Je précise que ces « inventions » ne sont pas des créations telles que les conçoivent Paul le Bohec ou Monique Quertier, mon choix fondamental étant bien celui de la recherche fondée sur l'entretien, le regard sur l'environnement, l'observation des enfants dans leurs jeux, leurs bricolages, etc. avec un basculement progressif dans l'abstraction et la construction de modèles, qui à leur tour viendront éclairer, structurer, outiller le regard...
- les temps collectifs, dévolus aux recherches trouvant leur sens dans l'entretien ou dans la vie de la classe, dans lesquels s'enchâssent le travail systématique de techniques dont la nécessité apparaît à l'évidence (« régulation identifiée », selon la terminologie de la théorie de la motivation intrinsèque) ;
- les « partages d'inventions », qui ont pour but de ne pas isoler les élèves dans leur travail personnel, et de faire en sorte que les itinéraires, compétences particulières, idées originales soient connues de tous, inspirent, élargissent les possibilités...

J'avais alors décrit par le menu le dialogue maître-élève au long d'une recherche personnelle. Voici maintenant une tentative de description des recherches collectives telles que je les mène actuellement, en essayant peut-être de faire apparaître une « méthode », ou, à tout le moins, la démarche générale présidant à ces activités. La démarche d'ensemble, la forme du support du travail – un « accordéon » de papier, la présentation du cahier (le résumé de la recherche, « Nous avons appris... »), sont des héritages de mon compagnonnage avec Jean-François Denis ; de son travail, on peut trouver une trace déjà ancienne dans le supplément au « Nouvel Educateur » n° 234 de mars 1992.

Conduite type :

Pour ma part, depuis plusieurs années, j'emploie en l'affinant et en la simplifiant sans cesse une « méthode » (je mets entre guillemets puisque la meilleure méthode est justement de n'en avoir aucune) que je peux résumer grossièrement ainsi :
- repérer - ou mieux, faire repérer par les élèves une situation mathématique ;
- formuler très clairement la / les question(s) ;
- lancer la recherche par un défi très simple ;
- observer les premières solutions trouvées ;
- demander leur démonstration, en insistant bien sur celles relevant de la représentation ;
- faire essayer par tous ces solutions sur de nouveaux défis, toujours modestes ;
- quand on est assuré que tous les élèves ont bien intégré la représentation de la situation, proposer des défis de plus en plus complexes ;
- observer les nouvelles solutions, rendues nécessaires par l'impossibilité d'avoir encore recours aux représentations ;
- demander leur démonstration et les faire essayer par tous ;
- à ce stade apparaît la solution experte, les techniques expertes ; il faut alors accepter que celles-ci ne soient ni comprises ni a fortiori utilisées par tous ; permettre en conséquence que certains aient recours à des solutions lourdes et peu efficientes, mais qu'ils comprennent, en fonction de leur degré de conceptualisation / de maîtrise technique.

Je laisse de côté les procédures types (ici, de l'étude des fonctions, qui amènent bien sûr à l'exploration de la réciproque et à la représentation graphique, ainsi que celles des bilans / traces écrites ; un exemple en sera donné ci-dessous)...

Pratiquement...

Je vais m'appuyer pour illustrer cette démarche sur l'une des recherches datant de ce début d'année scolaire (2013-2014), dans le domaine numérique, trouvant son origine dans une sortie essentiellement consacrée à l'étude du milieu dans le quartier de l'école, mais lors de laquelle nous avions à certains moments chaussé nos « lunettes mathématiques » : il s'agit de notre recherche n° 4 : « *La palissade en plaques de béton* ». Non loin de l'école, une propriété est entourée d'une clôture constituée de poteaux et de plaques de béton. Entre deux poteaux sont glissées quatre plaques... La situation est aussitôt énoncée par les élèves : « On peut compter les poteaux et les plaques, chercher combien il y a de plaques pour un certain nombre de poteaux ».

Pour m'assurer d'une vraie prise en compte, je fais « tourner à la main » : jeu de questions / réponses qui lance déjà la recherche : « Comment ça marche ?
- Il y a toujours 4 plaques entre deux poteaux...
- Et comment ça tient ?
- Sûrement qu'il y a des encoches dans les poteaux pour y glisser les plaques ?
- Oui... Alors combien faut-il de poteaux au minimum ?
- Deux, sinon ça ne tient pas !
- Alors si on a trois poteaux ?
- Il y aura 8 plaques ! »
Etc.

Itinéraire : nos recherches précédentes :

1. « Les souvenirs de Bretagne » : un magasin de souvenirs vendaient des figurines de fées et de korrigans ; une élève avait acheté plusieurs petites fées à 8 € pièce pour en faire des cadeaux ; et 2, 3, 4... fées ?
=> passage de la somme au produit, de l'addition itérée à la multiplication, découverte du graphe et de la « machine » ;
=> révision de la technique opératoire de la multiplication par un nombre à un chiffre ;
=> lancement des recherches individuelles dans le domaine des fonctions multiplicatives (fonction linéaires), chacun imaginant une situation du genre « un chien a 4 pattes, et *n* chiens ? », ou « chaque radiateur de la classe se compose de 36 éléments ; et *n* radiateurs ? », etc.

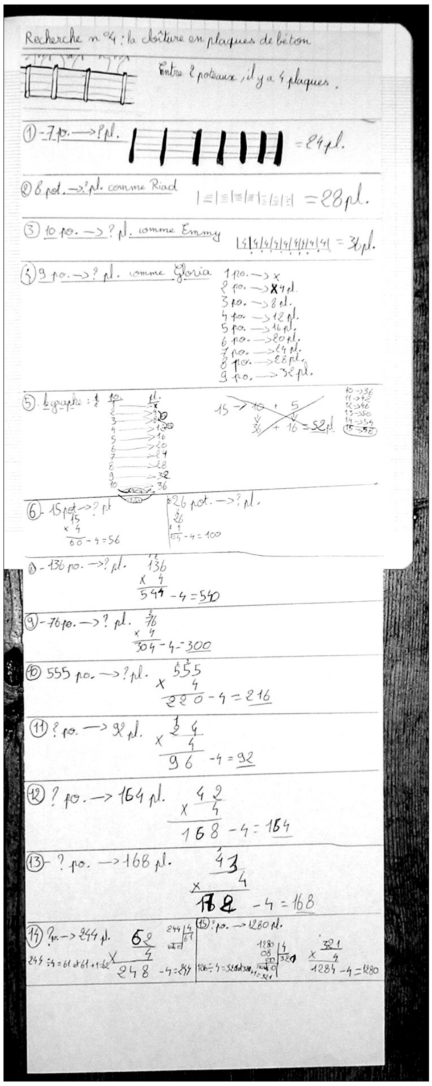
2. « Le retourneur de temps » : au musée Harry Potter de Londres, une élève a acheté des souvenirs, dont une sorte de pendentif, un « retourneur de temps », qui permet de reculer dans le passé ou d'avancer dans l'avenir. En quelle année se retrouve-t-on si l'on avance / recule de *n* années ?
=> techniques empiriques de soustraction (la technique usuelle n'est pour ainsi dire jamais utilisée spontanément, ce qui est bien normal puisque nous-même procédons par complément) ;
=> passage de l'addition à trou à la soustraction ;
=> révision de la technique opératoire de la soustraction.

3. « Cartes, échelles, distances » : les premiers entretiens de l'année sont riches de récits de vacances et de voyages. Se pose souvent la question : entre Dunkerque et telle ville ou telle région, est-ce loin, de combien de Km ?
=> décryptage et utilisation de l'échelle d'une carte ;
=> graphe, « machine », réciproque ;
=> multiplier par un nombre terminé par 0 (1 cm sur la carte représente 50 Km dans la réalité ; donc fonction x 50).

Ces recherches me paraissent intéressantes à mener en tout début d'année car elles viennent « nourrir » le travail personnel, dont cette entrée essentielle dans l'exploration de fonctions de plus en plus complexes, reliées à une réalité puis comme objets mathématiques abstraits, jusqu'aux « chefs d'oeuvre » évoqués dans le CH'TI QUI de juin 2013.

Supports de travail :

On travaille d'abord sur un « tâtonnement ».



J'ai récupéré des dépliants de feuilles autrefois utilisés pour les imprimantes des entreprises. En fin d'année, les élèves, traditionnellement, préparent le matériel de l'année suivante. Ils ont donc séparé ces longs dépliants en petits paquets de trois feuilles. C'est parfois suffisant pour une recherche. Si tel n'est pas le cas, on « scotchera » d'autres feuilles. Je fais la démonstration en début d'année de la manière de « scotcher » : bien bord à bord, avec trois petits morceaux d'adhésif, pour que ça puisse ensuite bien se plier, rester à plat quand on « enroule » pour coller dans le cahier qui ne doit pas prendre un embonpoint excessif !
En tête de ce « tâtonnement », on inscrit le numéro et le titre de la recherche. Ensuite, on séparera les « défis » successifs par de grands traits. On n'y écrit qu'au stylo à bille noir, pour la visibilité si l'on se sert de l'épiscope, et surtout pour contraindre à ne jamais rien gommer ; ce sont les erreurs qui bien souvent nous ferons avancer !
Le « tâtonnement », au terme du travail, est donc collé dans le cahier de mathématiques, suivi de la « mise au propre », souvent sur deux pages, qui est en fait un bilan de ce que nous y avons appris, et qui prend la forme d'un collage de « petits bouts de papier », j'y reviendrai.
Une quatrième page est réservée au collage de l'entraînement que je construis consécutivement, qui prend place durant le travail personnel de la semaine suivante.
Une recherche, c'est donc quatre pages de cahier.

Recherche n° 4 : « La palissade en plaques de béton »

Durée : six séances d'une demi-heure environ (ne correspondant pas forcément à des étapes identifiées), plus une de 45 minutes pour la « mise au propre ».

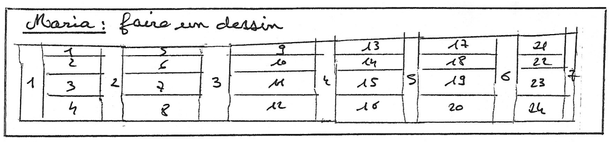
Etape 1 : problématiser.
Ce qui apparaît d'emblée comme compliqué lors d'une première discussion, c'est d'amener la classe entière à comprendre que 4 plaques ne peuvent tenir qu'entre 2 poteaux, qu'on n'est pas dans la situation simple de 1 poteau => 4 plaques. Ce genre de difficulté est facilement soluble dans le dessin. Occasion de se rappeler que lorsqu'une recherche « patine » trop vite et trop longtemps, c'est bien souvent parce que les élèves n'ont pas une représentation fiable de la situation, et que donc, la première étape nécessaire est justement celle de la représentation !
Il faut ensuite formuler clairement ce qu'on va chercher. Ici, c'est assez simple : « Pour un nombre de poteaux, on cherchera combien ils peuvent faire tenir de plaques ».

Etape 2 : coder.
On se met souvent d'accord sur un « code » qui évitera de trop longues écritures. La formulation précédente est donc simplifiée par cette écriture qui sera comprise par tous :

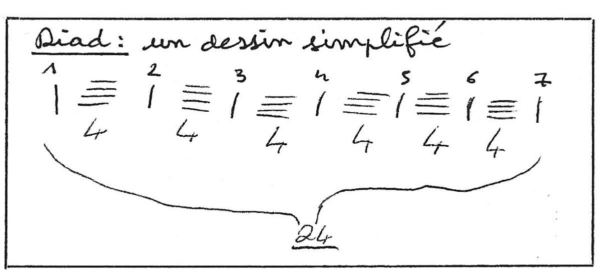
n po. ---> ? pl.

Etape 3 : un premier « défi » simple pour s'emparer de la recherche : 7 po. ---> ? pl. Les élèves ont pour consigne de ne surtout pas afficher un résultat, mais d'essayer de rendre compte de leur « façon de trouver ». Systématiquement, je ne donne la parole à personne pendant au moins trois minutes ; j'en profite pour regarder ce qui est en train de se faire, pour voir quelles sont les solutions qui émergent. Au terme de ce premier temps de recherche, j'envoie au tableau l'élève qui a trouvé la solution la plus « immédiate » (dans le sens de vraiment compréhensible par tous, même, comme je leur dis parfois, « par un enfant de l'école maternelle »). C'est presque toujours une solution qui reprend la représentation de la situation évoquée plus haut, donc une « solution dessinée ».
Ici, c'est à Maria que je demande de faire au tableau la démonstration ; cette « solution dessinée » prend donc le nom de « solution de Maria » ; elle sera désormais évoquée sous cette appellation.
Deux autres solutions donnent lieu à une démonstration : celle de Riad, qui est la même que celle de Maria, mais plus schématique ; celle d'Emmy, qui remplace le dessin des plaques par des « 4 » et se contente de dessiner les poteaux. Apparaissent donc ainsi la « solution de Riad » et la « solution d'Emmy ».

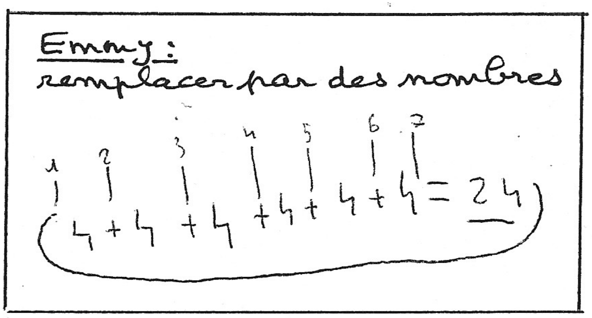
Détail important : lorsqu'une solution a été présentée et validée, je demande à l'élève éponyme de la « mettre au propre » sur une petite feuille, au stylo noir. C'est ce qui illustre cet article et qui servira au bilan dans le cahier...



Le dessin de Maria



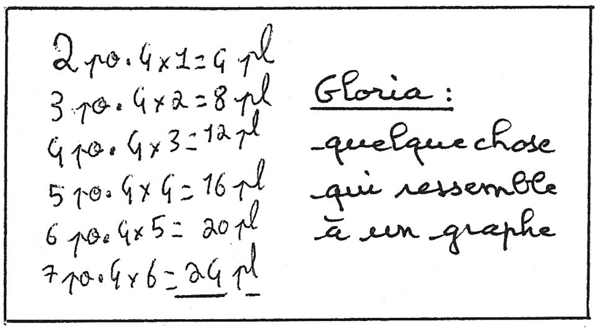
Le dessin simplifié de Riad



L'abstraction supplémentaire d'Emmy

Etape 4 : autres défis simples. Je tiens à ce que tous les élèves passent par cette étape de représentation, même ceux qui se sont déjà aventurés plus avant ; certains avec succès ; d'autres de manière non pertinente, pour lesquels il semble indispensable de revenir à ces représentations simples et a priori limpides. Les deuxième et troisième défis ne consistent donc qu'à appliquer obligatoirement l'une des solutions que nous détenons maintenant. J'invite donc tout le monde à chercher « comme Riad, puis comme Emmy ». Quand tout le monde a terminé, les solutions sont appliquées au tableau par d'autres élèves. Je suis alors assuré que chacun s'est bien approprié la situation.

Etape 5 : retour en arrière...
Lorsque je parcourais la classe pendant que les élèves se penchaient sur le premier défi, j'avais remarqué une solution déjà numérique intéressante pour la suite... J'invite donc Gloria à venir nous expliquer sa démarche. Elle a remarqué l'utilisation possible de la table x 4 :



L'utilisation de la table x 4 par Gloria

Comme précédemment, je propose un nouveau défi en demandant d'essayer la solution de Gloria.

… et quelqu'un de faire remarquer : « Ça ressemble à un graphe ! ». Gagné !

Etape 6 : le graphe.
Tout le monde sait de quoi il s'agit, puisque nous l'avons utilisé dans chacune de nos recherches précédentes. On se met donc d'accord sur les deux « colonnes » : une pour les poteaux, une pour les plaques. Et de remarquer qu'on a déjà des résultats grâce à la solution de Gloria. Chacun le réalise sur son tâtonnement, sans difficulté.

Po.		Pl.
1	------------------>	-
2	------------------>	4
3	------------------>	8
4	------------------>	12
5	------------------>	16
6	------------------>	20
7	------------------>	24
8	------------------>	28
9	------------------>	32
10	----------------->	36

Je propose alors un nouveau défi, pas trop ambitieux, pour voir si le graphe sera utilisé, et de quelle manière : 15 po. ---> ? pl.
En majorité, la solution adoptée consiste à continuer le graphe :

11	------------------>	40
12	------------------>	44
13	------------------>	48
14	------------------>	52
15	------------------>	56

Quelques élèves tentent d'appliquer avec logique ce qui avait été découvert dans l'utilisation du graphe de la fonction x 50 de la recherche n° 3.

15 po. = 10 po. + 5 po.

⇩ ⇩

36 pl. + 16 pl. = 52 pl.

Mais le résultat est contradictoire avec ce qui a été trouvé par les premiers.
On a donc recours à un essai avec des résultats présents dans le graphe « jusque 10 » :

7 po. = 3 po. + 4 po.

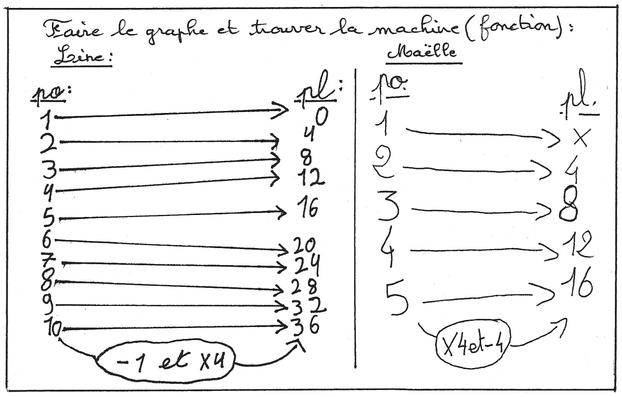
⇩ ⇩

8 pl. + 12 pl. = 20 pl.

Or, le graphe associe 7 poteaux à 24 plaques... Cette solution ne fonctionne pas ici (en réalité, elle ne convient que sur des fonctions linéaires, donc du type $y = ax$, tandis qu'ici, on est dans une situation du type $y = ax + b$, donc d'une fonction affine) !
Mais on se rappelle alors que lors de la recherche n° 3, il était question d'une « machine » x 50.
Il faut donc rechercher la « machine » qui permet de passer de la colonne « Po. » à la colonne « Pl. »...

Etape 7 : trouver la « machine » (la fonction).
Ce n'est pas facile. On se précipite sur une hypo-

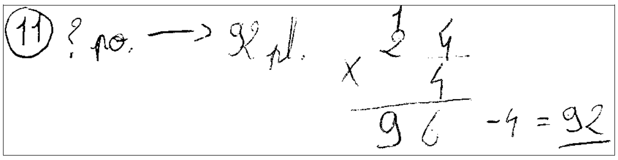
thèse « x 4 », pour constater, au regard du graphe, qu'elle ne convient pas. On observe un décalage de ligne : 4 x 4 = 16, mais c'est à la ligne du 5 qu'on a 16 ! Observation bientôt fertile...
Toutes les propositions sont essayées dans le graphe pour être invalidées.
La difficulté à ce moment de l'année est de faire accepter que la « machine » trouvée doit être valable à <u>toutes</u> les lignes du graphe. Un élève propose par exemple « + 8 » parce que ça fonctionne avec la ligne du 4 po. Oui, mais ça ne fonctionne plus avec une autre ligne. Il y a là un « saut » que certains ont du mal à franchir...
Finalement, deux solutions surgissent avec la constatation qu'il faut ici deux opérations.



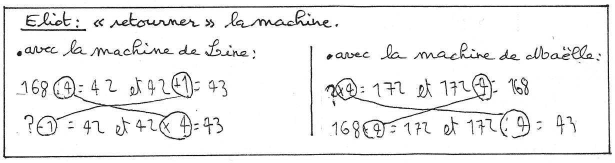
Les « machines » de Line et Maëlle

<u>Etape 8 :</u> utiliser les fonctions trouvées.
On peut maintenant s'attaquer à des défis de plus en plus ambitieux. Il est patent que pour quelques uns, c'est trop ! Leur niveau de conceptualisation ne leur permet pas de vraiment comprendre que ces deux opérations permettent de trouver facilement à tous les coups. Peu importe ; ce qui est important, c'est qu'ils puissent utiliser quelque chose qui leur convient, qu'ils se sont vraiment approprié. Leur montée en abstraction surviendra, je l'espère, progressivement, dans d'autres situations du même type, à commencer par ce qu'ils créeront eux-mêmes dans le cadre de leurs recherches libres personnelles. Voir l'idée de progressions non pas linéaires, mais spiralaires...

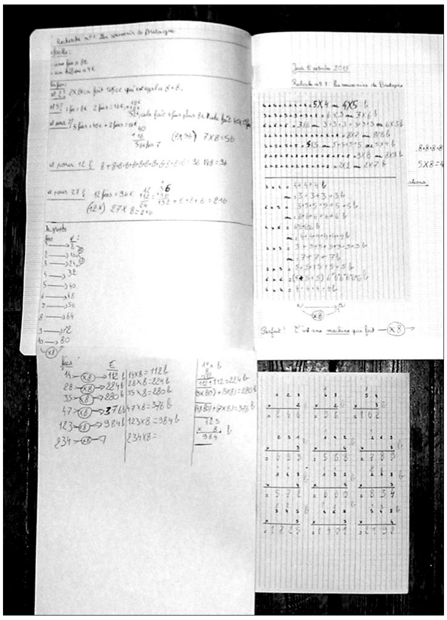
<u>Etape 9 :</u> la réciproque.
C'est ici particulièrement ardu, surtout à ce stade de l'année ; il est évident que pour beaucoup, se servir d'un graphe « rallongé » va rester la seule solution vraiment maîtrisée. D'autres, assez nombreux, cependant, vont rapidement tenter de « remonter » la ligne de calcul « à l'envers ».
Ainsi, pour le défi ? po. ---> 92 pl., ils comprennent que la question peut se traduire dans ce sabir, si l'on prend par exemple la « machine » de Maëlle : « *Quelque chose* x 4 = *autre chose* et *autre chose* - 4 = 92 ». Ce qui se matérialise dans les tâtonnements par des multiplications à trous :



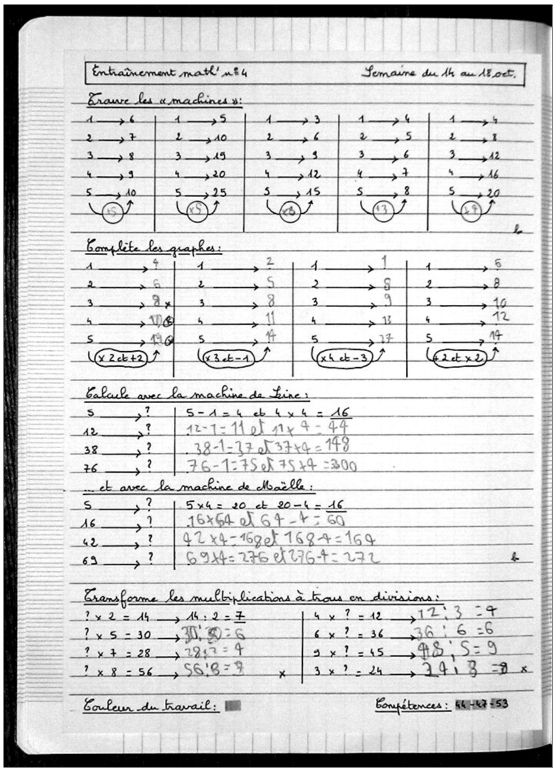
Finalement, Eliot fini par comprendre que « remonter à l'envers » revient à inverser l'ordre de la « ligne de calcul » en inversant les signes, ce qui signifie qu'il a conscience de la réciprocité des opérateurs + et -, x et :, ainsi que de l'équivalence de la multiplication à trou et de la division, savoir acquis en recherche libre personnelle.



<u>La question des outils techniques :</u>
Pendant quelques années, j'ai alterné systématiquement recherches et « caisses à outils », c'est à dire travaux très classiques de techniques opératoires, numération, traçages géométriques de base, etc. L'idée était que la recherche mettait en évidence le besoin d'une compétence particulière, d'un outil, et que donc ce travail moins séduisant, moins motivant, était au moins éclairé par un sentiment de nécessité, d'utilité.
J'ai finalement abandonné cette stratégie au profit de quelque chose de plus immédiat : c'est dans la recherche elle-même que je place maintenant des interruptions ou des « intermèdes techniques ». Il me semble que nous avons toujours intérêt à « enfoncer un coin » au moment le plus opportun, celui de la plus grande « perméabilité ».
C'est ici qu'il convient de préciser que le plus grand inconvénient de la recherche collective par rapport aux recherches personnelles tient précisément dans la moindre qualité de ces temps si précieux de « perméabilité », tout simplement parce que les élèves sont plus faiblement investis dans un travail dont ils ne sont ni créateurs ni auteurs...
Cela étant admis, il paraît « rentable » de réduire la distance entre la prise de conscience d'une nécessité et l'acquisition de l'outil concerné.
Techniquement, la recherche est arrêtée et nous travaillons sur des fiches préparées que l'on « scotche » aux tâtonnement ; voici par exemple, collés à droite du tâtonnement, deux « arrêts techniques » dans la recherche n° 1 « Les souvenirs de Bretagne » (transformations de sommes en produits, multiplications par un nombre à un chiffre) :



(« faire le graphe et trouver la machine »). Les formulations des titres sont celles des élèves. Les « petits bouts de papier » seront découpés et collés dans le cahier sous les titres appropriés. Une page est ensuite réservée pour accueillir l'en-traînement consécutif à la recherche.



La « mise au propre » :

On colle d'abord le tâtonnement dans le cahier.

J'ai organisé sur une feuille ensuite photocopiée pour chacun les « petits bouts de papiers » des solutions trouvées.

La « mise au propre » consistera donc simplement à se rappeler les différentes étapes de la recherche, de la situation problématisée à la découverte d'Eliot, en passant par les solutions de Maria et Riad (« représenter la situation »), Emmy et Gloria (« remplacer les dessins par des nombres »), Line et Maëlle