« POURQUOI FAIRE SIMPLE... etc... »
4. Recherches collectives en mathématiques – b) fonction modulo
Jean-marc Guerrien

Dans un précédent article, (*« POURQUOI FAIRE SIMPLE... etc. » 2. Recherches collectives en mathématiques – a) fonction affine*), j'ai relaté un travail collectif sur « *La palissade en plaques de béton* », amenant à la découverte puis à l'étude d'une fonction affine :

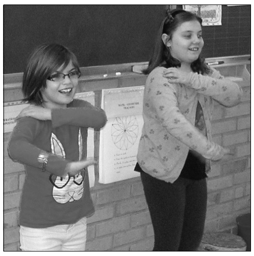
$$y = ax + b$$

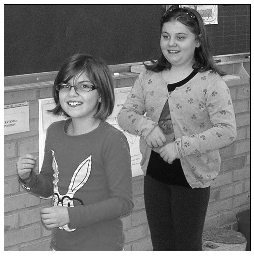
Voici une « suite », concernant l'étude, toujours en collectif, d'une fonction modulo, recherche issue d'un regard mathématique porté sur une danse exécutée par deux filles de la classe en récréation... avec peut-être l'idée de décrire encore d'autres travaux menés sur les différents types de fonctions.

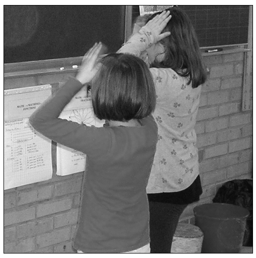
> *13 modulo* ***3 = 1*** *Qu'est- ce que ça veut dire ?*
> *Le reste de la division de 13 par 3 est 1. Cela veut dire que13 est associé à 1 par la fonction modulo3.*
> *On dit que 13 est* ***congru*** *à 1 modulo 3.*
> *Le reste de la division de 70 par 3 est aussi 1. On peut dire que 70 est congru à 13 modulo 3 parce que 13 et 70 ont le même reste dans la division par 3.*
> *On écrit 70 ≡ 13 ≡ 1 modulo 3*
> *7, 13, 19, 244 sont congrus modulo 3. En effet, quand on les divise par 3, ils ont tous le même reste « 1 ». Tous ces nombres congrus modulo 3 forment une classe d'équivalence dans N.*
> *On parle alors de* ***congruence*** *modulo 3 dans l'ensemble N. Cette congruence est une relation d'équivalence compatible avec les 4 opérations : addition, soustraction, multiplication, division (sous certaines conditions) dans N.*
> *Référentiel math de LRC de l'ICEM (à paraître)*

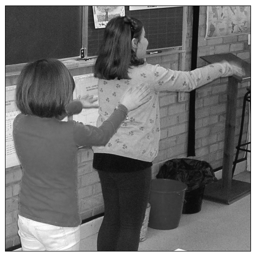
Je m'oblige de plus en plus à observer les jeux des enfants en récréation, tant ma curiosité a été réveillée en la matière par la numérisation des articles de François Pâques. Avec un peu d'entraînement, avec en tête la quinzaine de grands concepts mathématiques et un exemple-type de chacun d'entre eux, on parvient à saisir avec une acuité croissante une multitude de situations qui peuvent devenir autant d'entrées dans le travail... et c'est jubilatoire !

Donc, Maria et Emmy dansent. Moulinets de bras, et rythmiquement, des sauts faisant exécuter à chaque fois un quart de tour... Voyant que je les observe, elles m'expliquent qu'elles ont appris cette chorégraphie sur le temps du midi, lors des activités consécutives au repas à la cantine. Je leur demande de m'expliquer... « On fait ci... on fait ça... on saute d'un quart de tour, on recommence les gestes des bras... on refait un saut d'un quart de tour... donc on se retrouve dos à ceux qui nous regardent... et encore... et encore... on finit par revenir de face et on continue... ». S'engage alors un dialogue. D'autres enfants viennent voir. La question tourne (c'est le cas de le dire !) bien sûr autour de cette position, de face, de côté, de dos, de côté, de face, etc. « Et si vous faites 5 quarts de tours ? » Perplexes, Emmy recommence sa danse au début, tandis que Maria, immobile, le regard vers l'intérieur, réfléchit puis conclut : « On sera de côté, comme ça » (elle mime). Voilà donc lancée une prochaine recherche mathématique qui tombe à pic, puisqu'elle va nous permettre de porter un autre regard sur des histoires de quarts, de demis, de trois quarts... travail sur les fractions dont on sort tout juste. Je l'annonce aux enfants présents... qui trouvent très amusante l'idée de faire des mathématiques à partir de ça !
C'était un vendredi. Le lundi suivant, au moment d'entamer une nouvelle recherche collective, j'invite Emmy et Maria à danser devant la classe ; elles s'y prêtent avec le sourire... Je prends quelques photos qui serviront à la trace écrite finale.


1


2


3


4


5

...etc...

Etape 1 : comprendre la situation :
On rit beaucoup, c'est bien... et ce sera encore mieux si tout le monde se lève et au signal, saute d'un quart de tour à droite, et encore, et encore... jusqu'à faire plusieurs tours complets, rythmés par l'annonce du nombre de quarts de tours effectués. Il est important de vivre les choses dans son corps !
Bien sûr, on entame de travail sur cet accordéon de papier qu'on appelle un « tâtonnement » par un dessin. Pour que ce soit simple et compréhensible, on parvient à la conclusion qu'il faut dessiner un personnage sur d'au-dessus, avec seulement ses oreilles et son nez pour repérer son orientation (oui, je sais, le nez suffit, on y viendra peu à peu !).

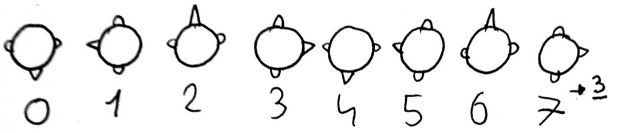
Etape 2 : problématiser :
Il faut maintenant formuler clairement ce qu'on va chercher. C'est assez limpide pour tout le monde : il y a là une histoire de quarts de tours, de positions qui reviennent toujours à l'identique, et parce que nous avons maintenant l'habitude de ce genre de formulation, un élève parvient à énoncer : « *Dans « n » quarts de tour, on sera dans quelle position ?* » On peut donc démarrer la recherche proprement dite, par défis successifs de plus en plus complexes, pour aller le plus loin possible, vers la solution experte, sans pour autant « forcer le passage » en voulant l'atteindre à tout prix ! On verra bien...
C'est aussi le moment de proposer un langage commun :

n/4 tr -----> p ?
(« *p* » pour « position »).

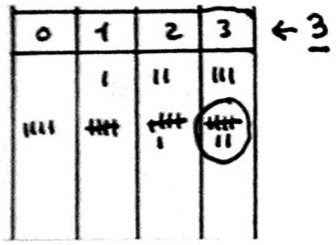
Etape 3 : premiers défis, premières solutions :
Je demande aux enfants de chercher

7/4 tr -----> p ?

Comme à chaque début de recherche, je re-précise que le résultat importe moins que la compréhension, à l'observation du tâtonnement, de la manière dont il a été trouvé. A ce stade de l'année (janvier), ils savent que toute latitude leur est laissée quant aux moyens à mettre en oeuvre ; ils ne se précipitent plus au-petit-bonheur-la-chance sur les quatre opérations !
Après quelques minutes de recherche silencieuse, lors desquelles je passe regarder ce qui apparaît, j'invite une première élève, Emmy, à faire au tableau la démonstration de sa solution. C'est bien sûr un croquis, tel qu'il a été adopté par la majorité. Ce sera désormais « la solution d'Emmy ».



Cela paraît simple, et pourtant il y a de nombreuses erreurs : puisqu'il s'agit de 7/4, on a trop vite fait de dessiner 7 têtes, en oubliant qu'en réalité, les quarts de tour sont les intervalles, et qu'il faut donc une tête de plus ; ou alors, on se réfère à la position « 0 », quand on n'a pas encore bougé, et donc fait « 0 » quart de tour.
Le même problème se pose avec une autre solution qui apparaît d'emblée, celle de Victor – que j'invite également à venir s'expliquer au tableau – qui utilise un petit tableau ; c'est bien dans la colonne du « 1 » qu'il faut commencer, et pas dans celle du « 0 ».



Les défis suivants,

13/4 tr -----> p ?
16/4 tr -----> p ?

ont pour unique but, en étant obligé de tester les solutions d'Emmy puis de Victor, même si l'on a autre chose, de bien intégrer ce problème du 0.
On pourra rétorquer que la position de départ aurait pu tout simplement s'appeler « 1 », mais cela ne manquerait pas de poser problème lors de l'accès à la solution experte, on le comprendra plus loin.
Lors du travail sur le défi « 16/4 », une idée intéressante et porteuse d'ouvertures apparaît ; c'est la « solution de Noémie » qui consiste à remplacer les petits bâtons de Victor par des nombres :

0	1	2	3
	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	...		

Ce tableau est expliqué par Noémie et bientôt, on devine facilement qu'il y a là « une histoire de table de 4 » (*dixit* Eliot). J'interroge donc la classe sur le contenu des autres colonnes.
Facilement, on en arrive à la constatation :

- 1ère colonne : résultats de la table x 4,
- 2ème colonne : ces mêmes résultats + 1,
- 3ème colonne : ces mêmes résultats + 2,
- 4ème colonne : ces mêmes résultats + 3.

Comme ces « + 1 », « + 2 » et « + 3 » correspondent aux en-têtes des colonnes, on en conclut – j'ai-de à cette formulation – qu'il suffirait de trouver, pour chaque défi, le « + combien ? » après un résultat de la table x 4. Par exemple :

7, c'est 4 + 3 => position 3
13, c'est 12 + 1 => position 1
16, c'est un multiple => position 0

Etape 3 : utiliser les multiples de 4 :
La difficulté est à ce moment-là de trouver les multiples de 4 quand on est confronté à des défis de plus en plus exigeants.
On se met d'accord sur une présentation : par exemple pour *27/4 tr -----> p ?*

$$27 = \underset{\Uparrow \atop 4\,x\,?}{\ldots} + \ldots \Rightarrow p\ ?$$

La stratégie la plus évidente consiste à établir une liste des multiples de 4, au-delà de 40. C'est fiable mais fastidieux et l'on devine bien que ça deviendra impossible à tenir si les défis atteignent des grands nombres. Il y aurait bien sûr une piste à creuser, déjà explorée dans une précédente recherche, consistant à « bricoler », sur la base de l'associativité de la multiplication, avec des tables par dizaines, centaines, milliers, etc. Je fais ici le choix de laisser cette piste de côté, constatant que personne ne songe à s'y aventurer, mais beaucoup, au contraire, se penchant sérieusement sur l'exigence d'une solution rapide dans la recherche du multiple
Riad et Eliot peuvent alors expliquer qu'ils ont eu l'intuition de la multiplication à trou pour trouver le multiple de 4 recherché.

Eliot pour 27/4 :

$$4 \times 6 = \underset{\uparrow \atop 4 \times 6}{24} + 3 = 27$$

... position 3.

Riad pour 49/4 :

$$4 \times 12 = 48 + 1 = 49$$

...position 1.

Je propose ensuite à la classe de multiples défis pour que chacun puisse bien bien s'imprégner de cette solution fiable et plus rapide que les précédentes. Il me semble important que TOUS les élèves en aient la maîtrise, car la solution experte s'approchant, je sais que plusieurs d'entre eux ne la comprendront pas ou n'en auront pas la maîtrise technique. Il est donc essentiel qu'ils puissent malgré tout s'en sortir, ne pas se sentir en échec... tout en percevant qu'il y a là quelque chose qui leur faciliterait le travail, et que donc le besoin d'un nouvel outil (la division) se fasse bien sentir.
Entre temps, d'autres « trucs » bien intelligents sont découverts, explicités et essayés par tous, comme la décomposition proposée par Martin :

$$94 = \underbrace{40}_{4\times10} + \underbrace{40}_{4\times10} + \underbrace{12}_{4\times3} + 2$$

80 92 94

Etape 4 : accès à la solution experte :
Plusieurs enfants, lorsque je jette un coup d'oeil à leur tâtonnement alors qu'ils travaillent aux défis successifs, me chuchotent que puisqu'on utilise une multiplication à trou, on peut sûrement faire une division. C'est Line qui la première y parvient et réussit à interpréter correctement ce qui se passe : le quotient donne le nombre de tours entiers, et donc il ne nous intéresse pas vraiment ; mais le reste correspond aux quarts de tour supplémentaires et c'est lui qui nous donne la position recherchée.

$\frac{161}{4}$ de tr → ? p ?

$$\begin{array}{r|l} 161 & 4 \\ -16 & 40 \\ \hline 01 & \\ -0 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

40 → nombre de tours
1 → reste : c'est la position !

Voilà une belle découverte pour les élèves qui maîtrisent la technique opératoire de la division !
On s'attache donc d'abord à comprendre ce changement d'écriture :

161 = (4 x 40) + 1 ----------> 161 : 4 = 40 reste 1

Les défis suivants vont donc consister à permettre au plus grand nombre de s'approprier cette solution qui apparaît comme étant de loin la plus rapide. Je dis « le plus grand nombre » parce que quelques enfants n'ont pas encore la maîtrise technique de cette opération ; mais ils ne sont pas sans ressource pour autant, puisqu'ils peuvent encore s'en sortir avec ce qui a été vu précédemment.

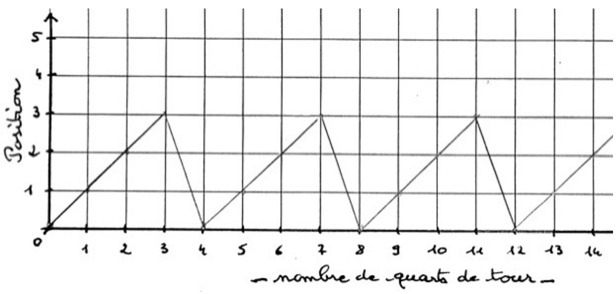
Etape 5 : identification de la fonction :
Dans nos précédentes recherches, nous avons bien souvent été amenés à constater qu'une « machine » était en oeuvre et qu'on parvenait à l'identifier en construisant un graphe (terme connu).
Je demande donc s'il est possible de faire ici le graphe. La résistance est forte, parce que ce qui sort de la machine ne « grandit » pas toujours comme dans nos expériences précédentes. Malgré tout, les enfants conviennent bien qu'on est dans la situation où

l'on entre un nombre de quarts de tour dans une machine et qu'il en ressort une position. On parvient donc à mettre à jour ce qui paraît d'emblée comme bien étrange...

<u>Quarts de tour :</u>   <u>Position :</u>

0 --------------------> 0
1 --------------------> 1
2 --------------------> 2
3 --------------------> 3
4 --------------------> 0
5 --------------------> 1
6 --------------------> 2
7 --------------------> 3
8 --------------------> 0
9 --------------------> 1
10 ------------------> 2
...etc...

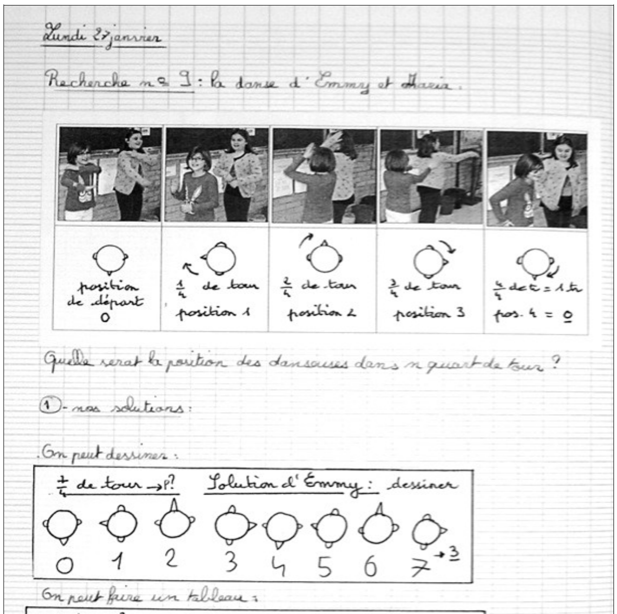
La question de la réciproque est très vite réglée. Tous comprennent vite que s'il sort 0 de la machine, on a pu y rentrer n'importe quel multiple de 4, que s'il en sort 1, on a pu y rentrer un multiple de 4 auquel on a ajouté 1, etc.
On construit alors la représentation graphique qui elle aussi, ne ressemble en rien à ce qu'on a vu jusqu'à présent lors des recherches collectives (fonctions linéaires) ou dans des recherches personnelles (fonctions affines, linéaires, constantes) : elle évoque les dents d'une scie ou des montagnes...



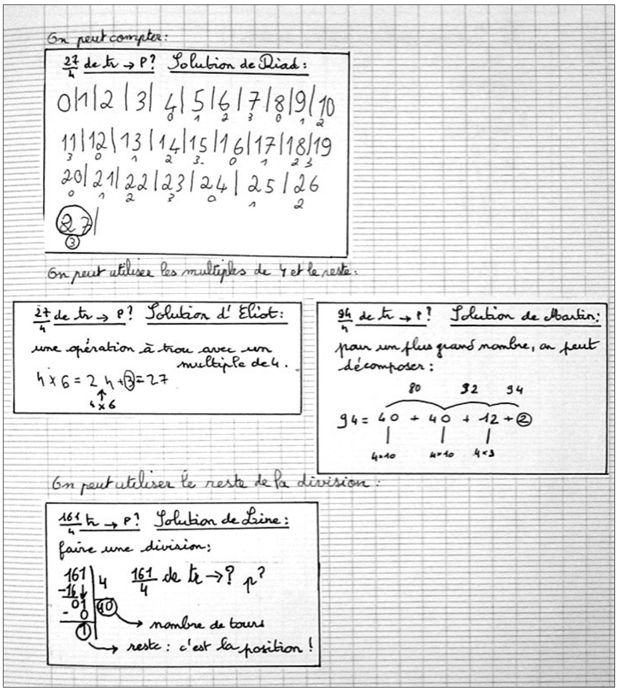
Comme on n'a pas peur des mots et que beaucoup sont friands de dénominations compliquées, je signale qu'il s'agit d'une « fonction modulo », et en l'occurrence, de « modulo 4 ».
La question ne manque pas de tomber : est-ce qu'il y en a d'autres, « modulo 3 » ou 5, ou plus ? Je réponds que ça correspond à des situations où l'on « tourne en rond », en revenant toujours au début. Perplexité... jusqu'au moment où Victor, enfant particulièrement curieux et éveillé, évoque les jours de la semaine : « Ce n'est pas comme les années où l'on ajoute 1 à chaque fois, mais on revient toujours à la même chose, tous les sept jours... ».
Je fais donc « tourner à la main » (oralement) : on est vendredi ; quel jour sera-t-on dans 3, 8, 16, 23 jours, etc. D'autres élèves évoquent ensuite les mois de l'année, les saisons, les feux tricolores, les phases de la lune (qui viennent d'être traitées lors d'une conférence d'Eliot)... Ce sont autant de pistes de recherches personnelles, immédiatement notées au tableau (voir annexes).
Bien sûr, l'ordre des choses n'est ici pas le bon : c'est plutôt à la suite d'un autre travail sur une fonction modulo que devraient arrivées des réflexions relevant du « C'est comme... », signe tangible d'une conceptualisation en marche...

Durée de la recherche :
Quatre séances d'une quarantaine de minutes chacune, durant la semaine du 20 au 24 janvier (bricolage sur le « tâtonnement », plus une séance de mise au propre sur le cahier de mathématique, lundi 27 janvier (collage des « petits bouts de papier » correspondant aux solutions trouvées). Cette recherche sera suivi d'une feuille d'entraînement, à traiter durant le temps de travail personnel de la semaine suivante (avec des défis pas trop ambitieux afin que chacun puisse utiliser avec succès la solution qui correspond le mieux à son niveau de conceptualisation ainsi qu'à sa maîtrise ou non de la technique opératoire de la division posée). Sa correction montrera que les élèves se répartissent en trois groupes à peu près égaux, utilisant respectivement le tableau, le multiple et la division.

Mise au propre page 1 :



Mise au propre page 2 :


On peut compter :

$\frac{27}{4}$ de tr → P ? Solution de Riad :

0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10

11|12|13|14|15|16|17|18|19

20|21|22|23|24|25|26

27|

On peut utiliser les multiples de 4 et le reste :

$\frac{27}{4}$ de tr → P ? Solution d'Eliot :

une opération à trou avec un multiple de 4.

4 x 6 = 24 + 3 = 27

Solution de Martin : $\frac{94}{4}$ de tr → P ?

pour un plus grand nombre, on peut décomposer :

94 = 40 + 40 + 12 + 2

4×10 4×10 4×3

On peut utiliser le reste de la division :

$\frac{161}{4}$ tr → P ? Solution de Line :

faire une division :

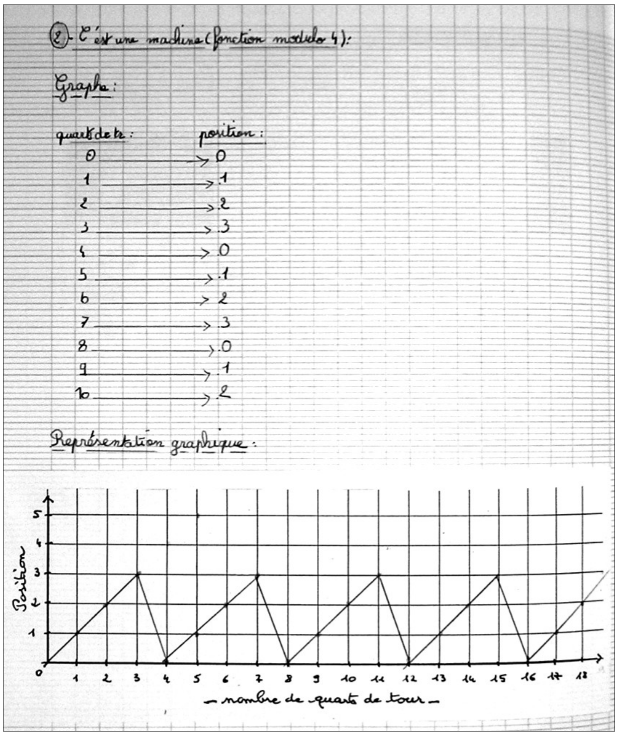
161 | 4
-16 | 40
01
-0
1

$\frac{161}{4}$ de tr → ? P ?

→ nombre de tours

→ reste : c'est la position !

Mise au propre page 3 :

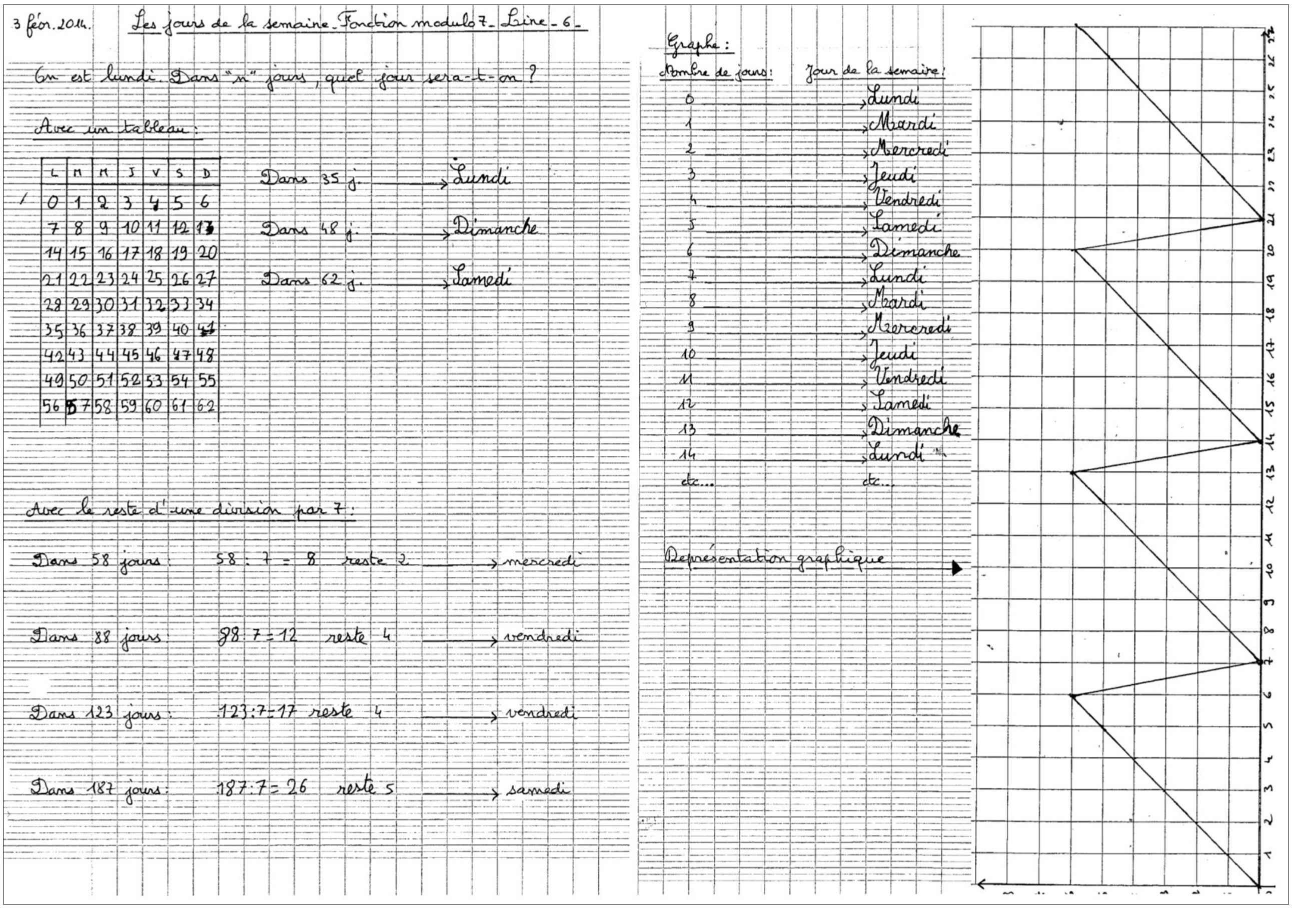

2- C'est une machine (fonction modulo 4) :

Graphe :

quart de tr :	position :
0	→ 0
1	→ 1
2	→ 2
3	→ 3
4	→ 0
5	→ 1
6	→ 2
7	→ 3
8	→ 0
9	→ 1
10	→ 2

Représentation graphique :

...et voici deux résumés de recherches personnelles consécutives :


3 févr. 2014. Les jours de la semaine - Fonction modulo 7 - Line - 6 -

On est lundi. Dans "n" jours, quel jour sera-t-on ?

Avec un tableau :

L	M	M	J	V	S	D
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62

Dans 35 j. → Lundi

Dans 48 j. → Dimanche

Dans 62 j. → Samedi

Avec le reste d'une division par 7 :

Dans 58 jours : 58 : 7 = 8 reste 2 → mercredi

Dans 88 jours : 88 : 7 = 12 reste 4 → vendredi

Dans 123 jours : 123 : 7 = 17 reste 4 → vendredi

Dans 187 jours : 187 : 7 = 26 reste 5 → samedi

Graphe :

Nombre de jours :	Jour de la semaine :
0	→ Lundi
1	→ Mardi
2	→ Mercredi
3	→ Jeudi
4	→ Vendredi
5	→ Samedi
6	→ Dimanche
7	→ Lundi
8	→ Mardi
9	→ Mercredi
10	→ Jeudi
11	→ Vendredi
12	→ Samedi
13	→ Dimanche
14	→ Lundi
etc...	etc...

Représentation graphique →

6 févr. 2014. **Les mois - fonction modulo 12 - Séance - 9**

F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	...						

On est en février...
Dans « n » mois,
quel mois sera-t-on ?

• **Avec le tableau :**

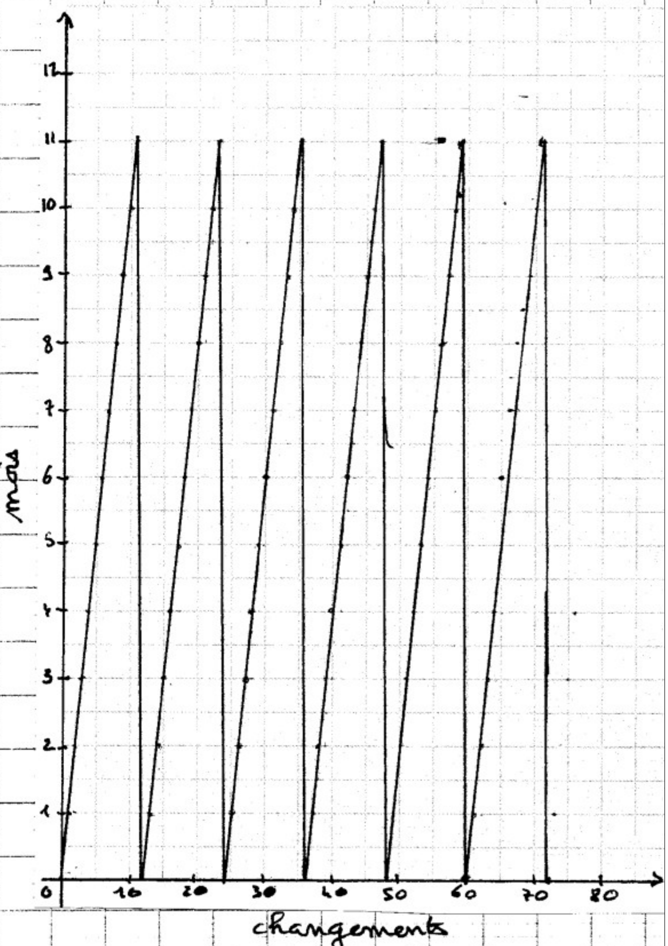
Dans 36 mois ?
février

Dans 76 mois ?
juin

• **En décomposant :**

Dans 131 mois ?
131 = 120 + 11
→ janvier

Dans 1 327 mois ?
1327 = 1200 + 120 + 7
→ septembre.



C'est une fonction « modulo », comme la danse d'Emma et Maria. Ici, c'est « modulo 12 », parce qu'il y a 12 mois.