RECHERCHE MATHÉMATIQUE COOPÉRATIVE

Origine, support, déroulé, synthèse...

Jean-Marc Guerrien

La question se pose encore et toujours, à propos des recherches mathématiques collectives lors de nos réunions, de l'origine, des supports, du déroulement, de la trace écrite et du travail d'entraînement consécutif. Or, c'est me semble-t-il l'une des deux « pierres de base » à maîtriser en priorité lorsqu'on se lance en pédagogie Freinet (l'autre étant la mise au point de texte et son lien avec l'étude de la langue). Tant que cette technique n'est pas acquise, il me semble impensable de se précipiter dans les recherches personnelles.

Pour apporter un nouvel exemple, j'ai choisi de relater ici *in extenso* une recherche que nous avons intitulée « Les bougies d'anniversaire », la dixième de l'année scolaire 2020-2021 (ce qui signifie que les enfants en connaissent l'esprit, maîtrisent la procédure d'ensemble et la gestion des supports).

Cadre général :

D'abord, comme je l'ai écrit précédemment, ma réflexion de ces dernières années creuse davantage l'aspect éducatif que le pédagogique au sens technique. Le type de recherche collective que j'illustre ici relève, je l'espère et je le pense, du coopératif, en ce sens que les défis lancés, une fois la problématique clairement établie, mobilisent des recherches personnelles qui sont ensuite présentées devant la classe pour être validées (ou invalidées) et entrent alors dans un patrimoine de solutions trouvées dans lequel chacun(e) pourra puiser ce qui lui convient le mieux, selon le degré d'abstraction atteint. C'est bien, par ces apports personnels, le groupe qui construit un corpus de savoirs, pour de possibles profits individuels consécutifs. Il se soude autour d'une tâche dont chacun tire profit.

Ensuite, dans ce même ordre d'idées plus éducatif que technique, je focalise le travail mathématique de la classe sur la maîtrise du milieu. En l'occurrence, construire un regard mathématique sur la vie, sur l'environnement immédiat, à rebours d'une précipitation trop précoce dans l'abstraction. L'idée avancée par François Pâques selon laquelle chaque enfant aurait à refaire l'entier parcours de la découverte des mathématiques depuis les débuts de l'humanité me séduit bien davantage que d'entrer de plain pied dans un langage spécifique, « fermé », se suffisant à lui-même, à ne surtout pas relier au réel immédiatement perçu ! Il s'agit de faire comprendre que les mathématiques sont partout et que l'environnement peut se regarder, entre bien d'autres points de vue, par le prisme mathématique. C'est pourquoi, définitivement, et ça n'engage que moi, car je ne veux engager aucune polémique (tout est bien si ça fait sens, si c'est « porté » par une conviction en emporte l'adhésion des élèves), je récuse toute idée de « création mathématique » détachée du réel immédiatement observable, tangible et concret, qui me semble trop éloignée de ce que je perçois de la pensée de Freinet et des objectifs que je me donne.

Enfin, si cela ressemble fort, justement, au « calcul vivant » que promouvait Freinet, il y a quand même bien ici, me semble-t-il, une « mathématisation ». Si l'on s'en tenait à la recherche de la solution pour la seule question initiale (« Si Théo fête son onzième anniversaire, combien a-t-il soufflé de bougies depuis sa naissance ? »), on aurait un problème scolaire tout à fait classique, qui aurait pour seul mérite particulier de trouver son origine dans la vie de la classe et serait donc doté d'un vrai sens. Mais l'on va aller plus loin, et la question posée sera plus large : « Comment calculer le nombre de bougies soufflées depuis sa naissance, quel que soit son âge ? » C'est cette idée du « toujours vrai jusqu'à l'infini » (si l'on peut parler ainsi d'une vie humaine) qui fait la « mathématisation » du problème. On est donc un peu plus proche des mathématiques que par le calcul vivant des origines, mais en demeurant dans sa philosophie générale (la maîtrise de l'environnement).

Une précision, pour rendre à César ce qui appartient à César, je veux dire une fois de plus que ce que je vais décrire ici, je le dois en grande partie, au moins pour ce qui concerne la gestion des supports (notamment la lisibilité des tâtonnements), à mon heureux compagnonnage avec Jean-François Denis pendant et après nos années de correspondance (voir l'encart central du « Nouvel Éducateur » n°234, lecture absolument prioritaire pour tout débutant en la matière).

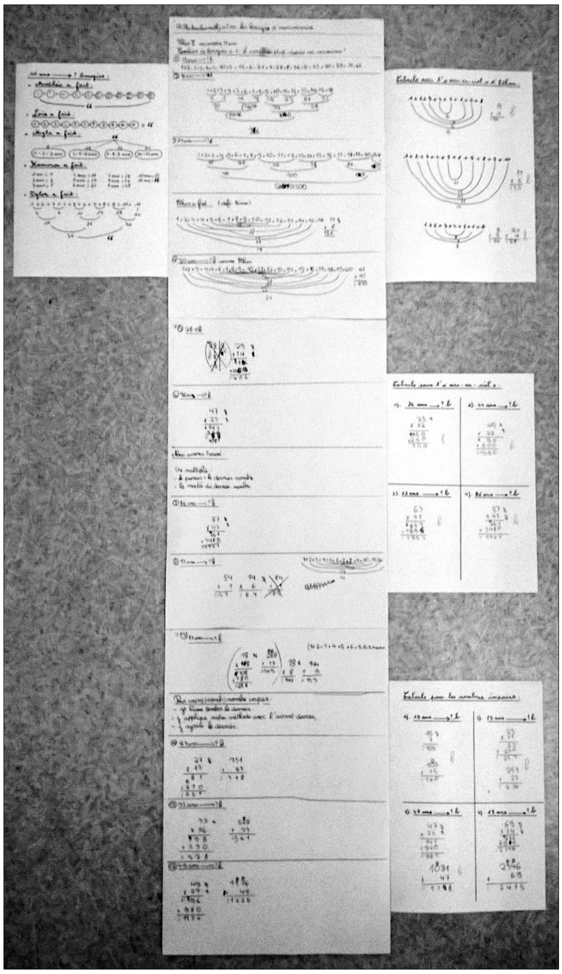
Origine :

L'origine est partout ! Sans doute se focalise-t-on trop, au début, sur une « lecture de l'événement » circonscrite à l'entretien. Rappelons simplement que dans les classes de Freinet et des pionniers, il n'y avait pas d'entretien formalisé (Freinet parle parfois de « causeries ») et que les pistes de travail naissaient de la vie de la classe, des textes, de la correspondance, des très fréquentes sorties... On peut, doit donc penser bien plus large ! Ici, la recherche trouve son origine dans la discussion consécutive à une présentation de texte.
Se pose évidemment LE problème de cette fameuse « lecture de l'événement », soit parvenir à détecter dans l'anodin du quotidien le concept sous-jacent qui fera le lien avec un possible apprentissage (car s'il n'y a pas apprentissage, alors ça ne vaut pas le coup, on n'est là que pour travailler et apprendre). L'écueil est là, bien plus que dans la méthode elle-même, qui est plutôt simple, et l'on en revient toujours à la question cruciale de la formation.

Le lundi 18 janvier, un élève lit lors des présentations un texte intitulé « L'anniversaire de Théo ». Interrogé, l'auteur explique que Théo l'a invité à son goûter d'anniversaire, lors duquel il a soufflé les 11 bougies de son gâteau (Théo, en CM1, a un an de retard). Lors de la discussion qui suit apparaît cette question du nombre de bougies que l'on souffle durant sa vie, ce nombre devant être élevé pour des personnes âgées. Ce qui est très curieux, c'est qu'à la question : « Alors, combien Théo a-t-il déjà soufflé de bougies ? », la classe répond massivement « 11 ! »
Les sabliers sont couchés et on creuse rapidement cette question, jusqu'à ce qu'une élève parvienne à formuler : « Non... il faut compter aussi toutes les bougies d'avant : les 11 de ce goûter, plus les 10 de l'année dernière, plus les 9 de l'année d'avant... jusqu'à la toute première ». Certains enfants se lancent de tête, 11 + 10 + 9... mais les résultats annoncés sont fortement divergents. Comme elle semble « accrocher », on fera donc de cette question l'objet de notre prochaine recherche.
L'idée en est notée sur un coin du tableau, et bien sûr, nous terminons le travail en cours, lequel est achevé le jeudi 21 janvier. Le vendredi 22, nous pouvons donc entamer cette « Recherche n° 10 : les bougies d'anniversaire ». Elle mobilisera cinq séances de vingt à trente minutes, plus une pour la synthèse dans le cahier.

Support :

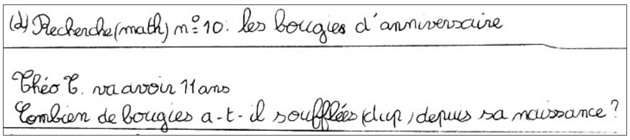
Les enfants travaillent sur ce que nous appelons un « tâtonnement ». C'est un dépliant de papier de quatre pages que je découpe dans ce qui se nomme officiellement « Papier listing pour traitement de texte », et que l'on trouve encore, même après la disparition des imprimantes qui « mangeaient » ce type de consommable, sur des sites de fournitures de bureau comme « Maximum ». L'avantage est que ça évite d'avoir à assembler des feuilles avec du ruban adhésif, opération toujours hasardeuse pour certains enfants. Avant le début du travail, le dépilant est... déplié, et les feuilles sont numérotées, car passer d'une page à la suivante dans le bon sens s'avère parfois compliqué, et l'on se retrouve avec des tâtonnements sans progression logique. Enfin, une feuille lignée est glissée entre les pages repliées afin de pouvoir écrire à peu près droit, et de bien gérer l'espace.
A ce dépliant seront ajoutés avec du ruban adhésif de petites feuilles jaunes, synthèses momentanées ou petits entraînements.



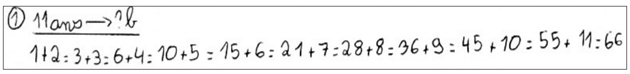
Première séance (vendredi 22 janvier) :

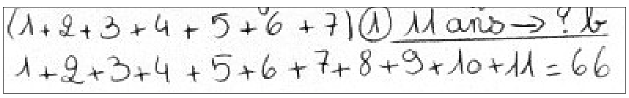
Le début de la recherche implique trois étapes indispensables :
- rappel de la situation d'origine,
- problématiser, soit formuler très clairement ce que l'on va chercher,
- se mettre d'accord sur une écriture simplifiée.

Ici, après discussion, la formulation approchée peu à peu est celle-ci : « Pour n'importe quel âge, combien a-t-on soufflé de bougies d'anniversaire depuis sa naissance ? » Et le « défi » en écriture abrégée aura cette forme : *n* ans => ? b (« b » pour bougies).


(4) Recherche (math) n° 10 : les bougies d'anniversaire
Théo C. va avoir 11 ans
Combien de bougies a-t-il soufflées (dup) depuis sa naissance ?

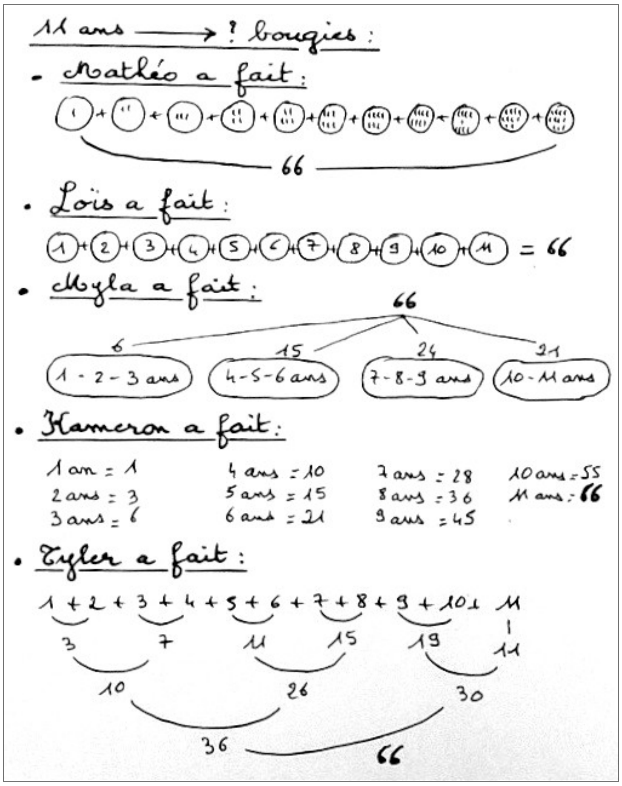
Puis nous entamons la recherche par des « défis », soit autant de problèmes ponctuels dans l'idée de parvenir à une généralisation.
Toujours, je commence par un ou plusieurs « défis » très simples pour entrer dans la recherche. Le but est double : d'une part, s'assurer que TOUS les élèves ont une bonne représentation de la situation, et d'autre part permettre aux plus fragiles de rencontrer immédiatement le succès.
En l'occurrence, puisque Théo a eu 11 ans, le premier défi est : « 11 ans => ? b »
En janvier, les enfants ont l'habitude de ce travail. Ils savent que chaque défi sera suivi de 3 à 5 minutes de silence, avec deux consignes : faire marcher le stylo plutôt que la langue, et surtout écrire sa solution, la manière de trouver étant plus importante que le résultat, car ce sera elle, ensuite, qui sera partagée.
Cela fait, tout le monde ayant cherché, et parfois trouvé, on passe à l'étape de passage en revue des solutions trouvées. J'envoie les enfants au tableau, chacun exposant sa démarche. Pas dans n'importe quel ordre ! Pendant le travail, je suis passé dans les rangs, j'ai regardé ce qui se profilait, et l'ordre que je privilégie alors va de la solution la plus concrète, donc généralement un dessin, à la plus détachée de la représentation.


① 11 ans → ? b
1+2 = 3 + 3 = 6 + 4 = 10 + 5 = 15 + 6 = 21 + 7 = 28 + 8 = 36 + 9 = 45 + 10 = 55 + 11 = 66


(1+2+3+4+5+6+7) ① 11 ans → ? b
1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11 = 66

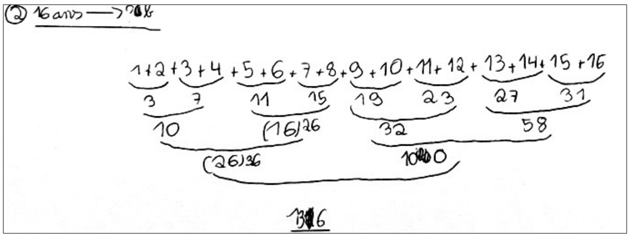
Deux cas de figure à ce stade...

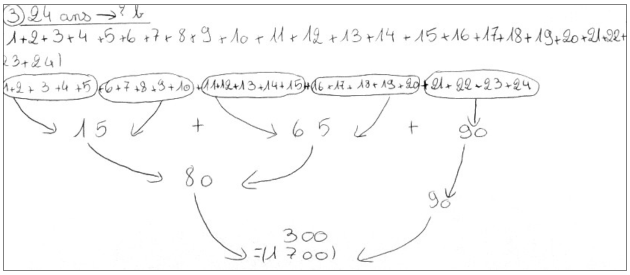
Soit le problème posé est difficile, les résultats divergent, il y a des solutions valides et d'autres qui ne le sont pas. Dans ce cas, il faut prendre une par une les solutions trouvées, les faire exposer et les discuter pour les valider ou les invalider, puis il faut mettre à l'épreuve de nouveaux défis simples celle qui ont été validées, afin que ceux qui sont restés « secs » (ça arrive rarement, mais ça arrive, surtout en début d'année) ou qui sont partis sur de fausses pistes puissent s'approprier un procédé qui leur convient, ou entrevoir une autre solution personnelle.
Soit tout le monde trouve rapidement quelque chose d'efficace, en témoignant ainsi d'une bonne intégration de la situation, et les résultats ne divergent pas trop. C'est le cas ici. Dans cette hypothèse, on peut aller plus vite, se contenter d'établir un catalogue des solutions trouvées, et passer à la suite.
Ce « catalogue » est le plus souvent constitué par les auteurs des solutions validées. Je leur demande une mise au propre en noir sur un petit bout de papier. Leur assemblage photocopié sera distribué à tous, et parfois, c'est ce qui constitue la trame de la synthèse (que nous appelons notre « Mise au propre »). Cette fois, je l'ai formalisée moi-même car ce que m'ont rendu les auteurs prenait trop de place ou n'était pas suffisamment clairement présenté.



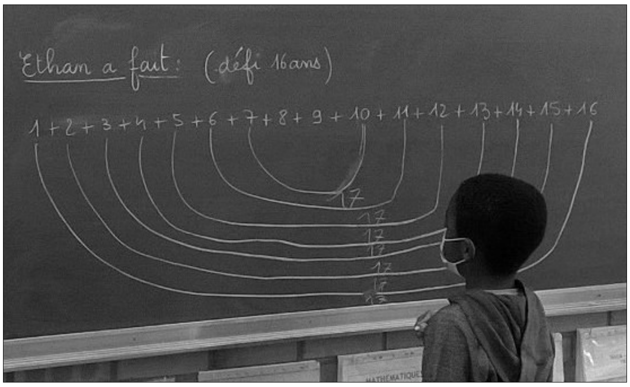
Deuxième séance (lundi 25 janvier) :

Cette séance est consacrée à d'autres défis simples, en utilisant les solutions trouvées, selon les préférences de chacun. On voit ici des extraits de deux tâtonnements, avec des choix différents.

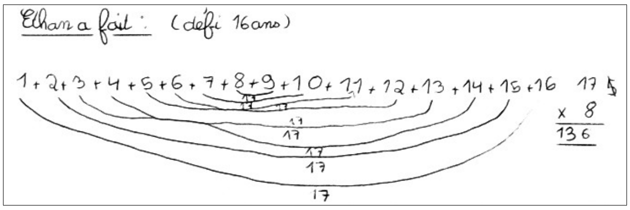




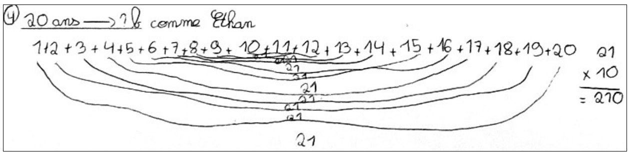
Les corrections collectives de ces défis au tableau, selon plusieurs procédures à chaque fois (les plus utilisées), montrent qu'aucun enfant ne rencontre de difficultés particulières (sauf à commettre des erreurs de calcul).
Lors de ce travail, je constate qu'un élève, Ethan, a trouvé ce qu'il fallait pour une avancée significative. Il a constaté que la somme du premier et du dernier nombre de la suite est équivalente à celle du deuxième et de l'avant-dernier, et de même avec le troisième et l'antépénultième, etc.
Je l'envoie donc en faire la démonstration au tableau.



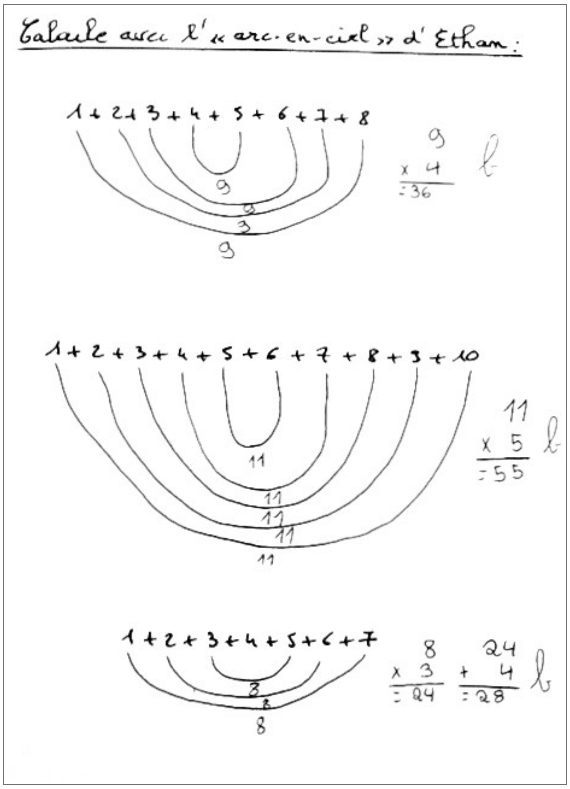
Étonnement général... et constatation de la pertinence de la démarche ! Nous avons donc une méthode dont Ethan est l'éponyme : « L'arc-en-ciel d'Ethan ». Sur les tâtonnements, tout le monde prend note. On formule aussi qu'une fois faites les « lignes de l'arc-en-ciel », il faut multiplier : la somme à chaque ligne x le nombre de lignes.



Le défi suivant a pour but de s'approprier l'« arc-en-ciel », en faisant « comme Ethan » :



On s'arrête là. Le lendemain matin, je demande aux élèves de prendre dix minutes, pendant leur temps de travail personnel, pour s'entraîner un peu à cette technique, sur une petite feuille jaune, du même format que celle des solutions trouvées.



Troisième séance (mardi 26 janvier) :

La séance commence par la correction collective de cet entraînement.

Nous reprenons ensuite le travail, et comme à chaque fois, nous rappelons ce que nous avons appris : un élève résume la ou les séances précédentes. En l'occurrence, ça va plus loin que prévu dans la clarté puisque très vite, d'autres prennent la parole pour rendre compte de leurs constats :

- le « nombre avec lequel on travaille » est toujours la somme du premier et du dernier de la suite,
- le nombre de « lignes de l'arc-en-ciel », c'est la moitié du dernier.

Dès les premiers défis du jour, si quelques-uns dessinent encore l'« arc-en-ciel », ou le simplifient en le réduisant au début et à la fin, la grande majorité s'en passe, pour avoir immédiatement recours aux opérations :

⑤ 28 ans → ? b	⑥ 46 ans → ? b
29 b	46 : 2 = 23
× 14	47
= 116	× 23
+ 290	141
406 b	+ 940
	= 1081

On est donc « à maturité » pour formaliser :

Nous avons trouvé :
On multiplie :
- le premier + le dernier nombre,
- la moitié du dernier nombre.

Et tester à nouveau :

⑦ 86 ans → ? b
87
× 43
261
3480
3741

Quatrième séance (jeudi 28 janvier) :

Nous corrigeons d'abord un nouveau petit entraînement qui a été fait durant la séance de travail personnel qui a précédé :

Calcule sans l'« arc-en-ciel » :

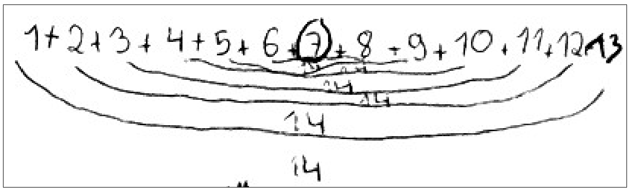
1). 24 ans → ? b	2). 44 ans → ? b
25 × 12 = 050 + 250 = 300 b	45 × 22 = 90 + 900 = 990 b
3). 62 ans → ? b	4). 86 ans → ? b
63 × 31 = 063 + 1890 = 1953 b	87 × 43 = 261 + 3480 = 3741 b

Maintenant, reste à pousser le bouchon plus loin... car jusqu'à présent, je n'avais proposé, depuis celui qui était à l'origine du travail, que des défis dans lesquels *n* était pair. Passons donc aux *n* impairs.

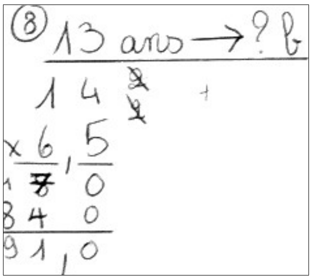
On pourrait aisément rétorquer qu'il y a là une entorse au principe selon lequel il vaut mieux aller du complexe vers le simple, car telle est la réalité qui s'offre au premier regard, et qu'il y a une attitude « scolastique » à tordre cette réalité en la simplifiant. C'est vrai. Mais il me semble que ponctuellement, il existe au moins de contre-arguments (qui ne doivent surtout pas devenir des généralités) :

- la gestion du temps ; en l'occurrence, une recherche ne doit pas durer plus 5 ou 6 séances, afin de pouvoir en faire beaucoup, et donc d'avoir la possibilité de revenir le plus souvent possible sur de mêmes concepts (progression spiralaire) ; c'est ce souci qui fait qu'en janvier, on a déjà bouclé dix recherches, et qu'entre certaines d'entre elles sont venues s'intercaler cinq « Caisses à outils » ;
- la « mise à portée » ; je veux dire que parfois, souvent même, on est amené à ménager des simplifications pour faciliter l'intégration des connaissances ; voilà un autre aspect de la fameuse « part du maître » qu'on n'a peut-être pas assez creusé...

Retour, donc, à des défis simples pour en revenir au départ, et identifier rapidement ce qui pose problème : il y a un nombre, au milieu, seul, qui ne peut donc correspondre à aucune « ligne de l'arc-en-ciel ».



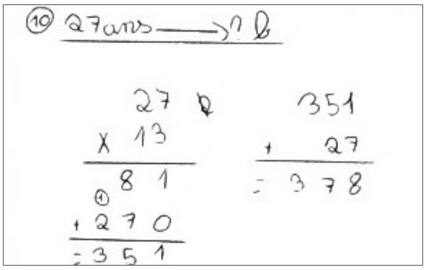
Il y a bien un éclair de génie quelque part, mais il est isolé, et en l'état inaccessible à la plupart, techniquement et de par le degré d'abstraction requis. Je conforte donc l'élève qui en est l'auteur, sans aller plus loin.

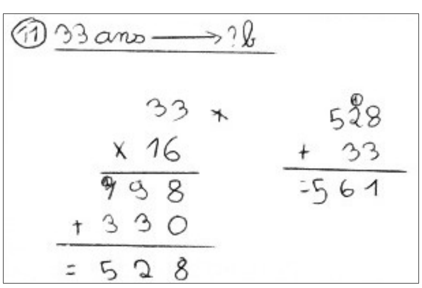


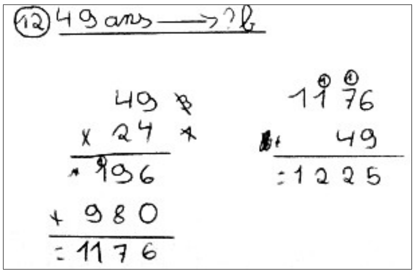
C'est une autre idée lumineuse qui libère, car à portée de tout le monde. Théo nous dit en substance : « 13, c'est très embêtant, mais qu'on sait faire pour 12... Alors on fait pour 12 ans, puis on rajoute les 13 bougies du 13ème anniversaire ».
Ce qui est formalisé de la manière suivante :

Pour un(m) (nomb~) nombre impair.
- je laisse tomber le dernier
- j'applique notre méthode avec l'avant dernier,
- j'ajoute le dernier.

...et aussitôt appliqué dans les trois derniers défis de la recherche :

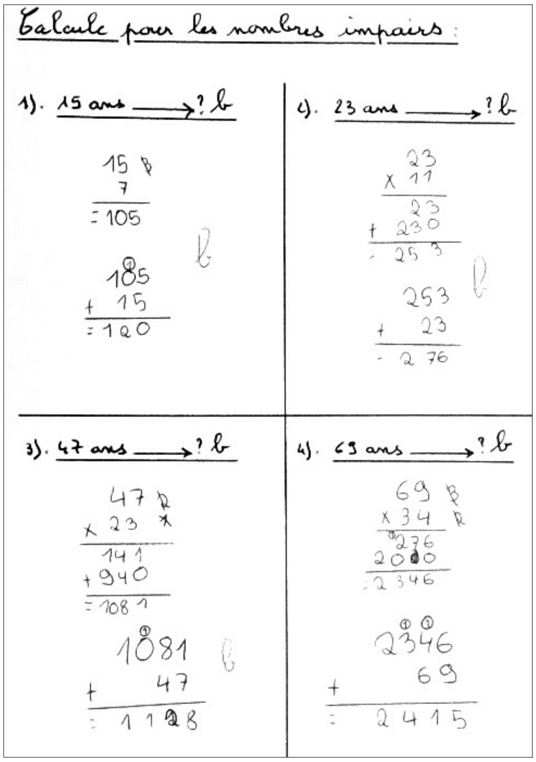






Cinquième séance (vendredi 29 janvier) :

Cette séance, très courte, est consacrée à la correction des défis 10, 11 et 12, puis à une nouvelle petite fiche d'entraînement corrigée collectivement dans la foulée.

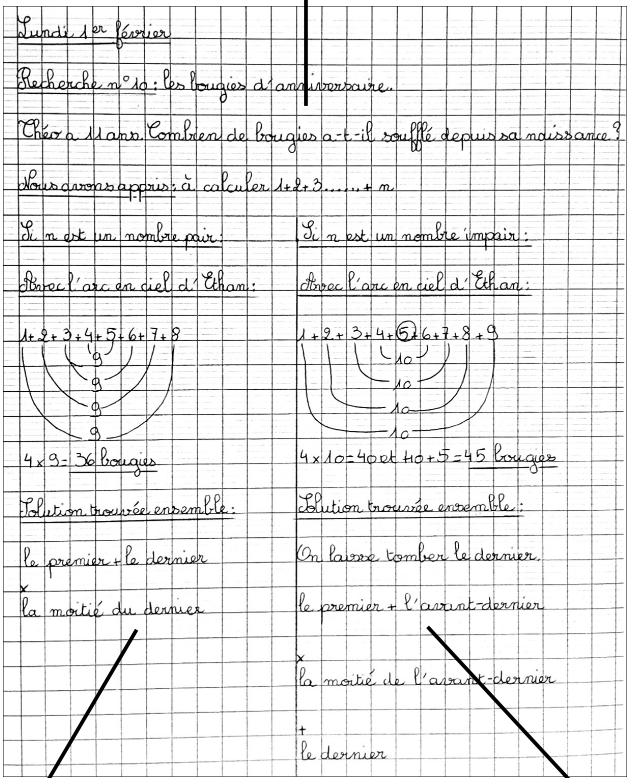


Sixième séance (lundi 1er février) :

La dernière d'une recherche est toujours consacrée à ce que nous appelons la « mise au propre », qui est en réalité une synthèse. Nous utilisons pour cela une double page du cahier unique : la synthèse proprement dite sur la page de droite, le tâtonnement « enroulé » étant collé sur celle de gauche. J'insiste toujours sur « ce que nous avons appris » : il s'agit de bien fixer dans les têtes que nous sommes en perpétuel apprentissage, et qu'en fin de travail, il est nécessaire de se retourner sur celui-ci pour faire le point.

Cette « mise au propre » devient aussi un outil de référence pour les travaux suivants, entraînements, recherches personnelles sur une même notion, recherches coopératives apparentées à d'autres moments de l'année...

Titre, situation, problématisation



Avec un nombre pair ***Avec un nombre impair***

Quelques remarques...

On a vu que par trois fois, une séance a débuté par la correction collective d'un petit entraînement. Ce qui amène à dire quelques mots de l'emploi du temps. Le travail personnel (avec plan de travail) a lieu de 9h20 (après l'entretien et la mise au point de texte coopérative) jusqu'à la récréation. J'ai préparé cet entraînement la veille et les enfants l'ont trouvé dans leur bac à courrier (dans lequel ils reprennent leur travail annoté, corrigé, prêt à être poursuivi), à l'entrée de la classe, en arrivant le matin. Ils savent qu'ils devront donc prendre quelques minutes pour y travailler et qu'il devra être prêt à corriger lors du travail coopération en math, situé en fin de matinée.

Cette recherche n'a pas occasionné de « Caisse à outils ». Ce que je place sous cette dénomination, c'est un travail collectif – mais plus guère coopératif – qui consiste en l'acquisition d'un outil (par exemple une technique opératoire) sur trois, quatre, cinq... séances, dont le besoin de maîtrise est clairement apparu lors d'une recherche précédente.

Toute recherche, toute « caisse à outils » donne lieu à une fiche d'entraînement « maison » qui fera partie du plan de travail personnel la semaine suivante. Contrairement aux petits exercices ponctuels qui interviennent en cours de recherche, cette fiche ne donne pas lieu à une correction collective. Je vérifie moi-même, demande parfois à tel ou telle élève d'y revenir, remédie à des blocages, etc. Cette entraînement sert aussi d'évaluation et permet, si validation, d'aller colorier une compétence sur le livret personnel (les enfants en ont pris l'habitude : lorsqu'ils entrent en classe le matin, ils récupèrent dans leur panier personnel le travail corrigé ou prêt à être poursuivi ; ils colorient immédiatement les coméptences qui ont été validées).

	CALCULS
37	Je sais calculer la somme d'une suite de nombres de 1 à n.
36	Je comprends ce qu'est une puissance, je sais calculer le carré, le cube...

Une recherche collective / coopérative peut déclencher des recherches personnelles, dont je signale les pistes possibles. A la suite de ce travail, il serait par exemple possible de chercher s'il est possible d'utiliser le même procédé si l'on compte de 2 en 2, de 3 en 3, de *n* en *n*... Il est aussi possible de constater que dans certaines recherches personnelles, on est dans des situations qui supposent des calculs semblables (« pyramides » formées avec des carrés, des triangles : en fonction du nombre de carrés ou de triangles à la base, calculer leur nombre total), etc.

C'est souvent dans ces recherches personnelles que les élèves se détachent peu à peu du réel, pour entrer dans l'abstraction, ce que je ne recherche pas forcément, car le travail mathématique individuel est avant tout le lieu de la géométrie, du traçage, de la transformation, encore une fois le plus souvent possible en lien avec des observations de l'environnement ou des « reculs » disciplinaires lors des entretiens.

Jean-Marc Guerrien
CM1, école Lamartine,
Dunkerque-Rosendaël.