RECHERCHES PERSONNELLES EN MATHEMATIQUES
...intentions, itinéraires, « chefs d'oeuvre »...

Jean-Marc Guerrien

Lorsqu'on mène sa classe au jour le jour, on perçoit souvent difficilement les itinéraires à long terme de chacun, faute de pouvoir appréhender avec suffisamment de recul la complexité dans laquelle on se trouve immergé, même en cochant très sérieusement ses grilles de compétences ! Dans le cadre de la recherche mathématique individuelle, pourtant, en tenant compte des directives de variété qui leur sont données (par exemple, alterner géométrie et numérique), certains élèves semblent suivre un itinéraire plus ou moins conscient, qui souvent aboutit à la volonté de démontrer leur savoir-faire dans une réalisation complexe, « impressionnante » aux yeux des autres et du maître. Comme dans les textes libres parmi lesquels il est possible de discerner des « séries solides » (voir Pierre Clanché : « *L'enfant écrivain* », Editions Païdos – Le Centurion), des « tendances » peuvent être repérées lorsqu'un enfant, soit au regard de son livret d'évaluation, soit à l'imitation de prédécesseurs, soit pour suivre une piste ouverte par le maître à la suite d'un travail achevé, se construit un itinéraire en vue d'explorer de manière exhaustive un domaine particulier.

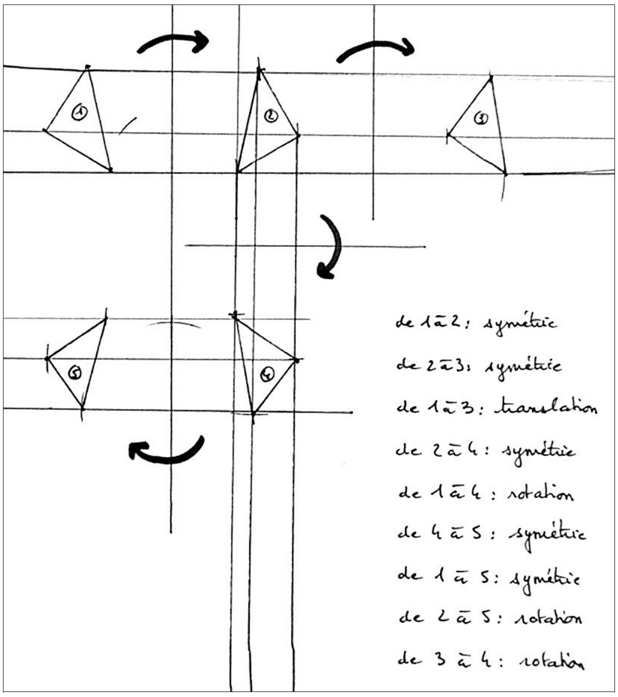
Je l'ai pour ma part remarqué puis signalé à la classe lorsque sont apparus des « Chefs d'Oeuvre » en géométrie de transformation, à peu près chaque année depuis que je travaille en mathématique selon cette démarche. De quoi s'agit-il ?
Lorsque j'explique aux élèves, en début d'année, dans quels domaines peuvent s'appliquer les « inventions » mathématiques donnant lieu à des recherches individuelles (voir l'article « *L'octogone de Boris* » dans un précédent CH'TI QUI), ils s'emparent, avant de créer plus librement des « objets mathématiques », de quatre pistes principales :
- « machines » (définition « thorélienne » de la fonction) ;
- « opérations », lois de composition internes utilisant en réalité les quatre opérations connues ;
- « géométrie <u>de traçages</u> », pour en distinguer la :
- « géométrie <u>de transformation</u> », soit l'exploration des symétries, translations, homothéties et rotations ainsi que de leurs compositions.

Lors des travaux sur les transformations, je propose assez systématiquement de « composer » ; la question se pose alors d'un travail « direct » ; par exemple, on constate facilement qu'en composant deux symétries, on obtient une translation, mais comment réaliser une translation sans passer par la symétrie ; ce qui implique d'autres compétences, d'autres outils. Il y a même là un « levier » pour inviter à l'exploration.

<u>Exemple 1 :</u>

Sofyan, année scolaire en cours.

En lui faisant composer plusieurs fois et selon différents axes des symétries, il obtient deux autres transformations, translation et rotation, qu'il « voit » puisque qu'elles sont nommées à chaque fois que nous les rencontrons, ce qui est courant autour de nous à condition de chausser les « lunettes mathématiques » adéquates (voir le livret de sensibilisation du fichier de géométrie).
J'indique donc à Sofyan que lors de prochaines recherches, de nouvelles pistes s'offrent à lui, à savoir effectuer translation et rotation sans passer par des compositions de symétries.



L'idée apparaît alors, assez « naturellement », lorsque les quatre transformations ont été travaillées, de les composer selon un ordre aléatoire (bien que reflétant souvent celui dans lequel elles ont été précédemment abordées), comme pour en prouver (ou <u>s</u>'en prouver ?) la maîtrise totale. Dès qu'un élève

présente à la classe l'aboutissement d'un tel projet, l'envie fait tache d'huile, et l'on s'interroge du même coup sur la manière dont cette notion même de « Chef d'Oeuvre » pourrait se traduire en « machines », « opérations », etc., ouvrant par là-même de nouvelles possibilités, de nouvelles envies...
Ce « moment » est important, car il génère dans la vie de la classe un élan supplémentaire et une attention supérieure à ce que produisent les autres.
Par l'enthousiasme qu'il peut déclencher, il s'apparente presque à cette « expérience cruciale » dont il a déjà été souvent question, qui fait véritablement « décoller » la classe comme groupe coopératif.

Avant d'en venir à des exemples, il me semble qu'au sein de la démarche pédagogique globale qui est la nôtre, le terme de « Chef d'Oeuvre » paraît particulièrement approprié parce qu'il s'articule à l'oeuvre telle que je l'entends lorsque je mets en place un « Cahier d'Oeuvre ».
Je précise que je l'entends dans son acception masculine et au singulier, c'est à dire comme « ensemble des productions » (avec l'idée d'un continuum, de quelque chose qui est en train de se faire, d'une dynamique).
Le « chef d'oeuvre » y apparaît alors comme un summum, un « pic » remarquable vers lequel convergent tous les efforts et de multiples tentatives prenant alors de statut de tâtonnements ou d'éléments d'un puzzle. Que les élèves en soient conscients, et cet aspect méta-cognitif dénote une vision remarquable de leur manière d'apprendre et ne peut que se révéler très positif, avec une fonction d'« accélérateur » de leur cheminement.

Je suis aussi sensible à la *beauté* de ce Travail (je mets à dessein une majuscule) au regard de celui de ces ouvriers d'élite que sont les Compagnons du Devoir, qui eux aussi, leur « Tour de France » achevé, présentent à leurs Maîtres leur « Chef d'Oeuvre »...

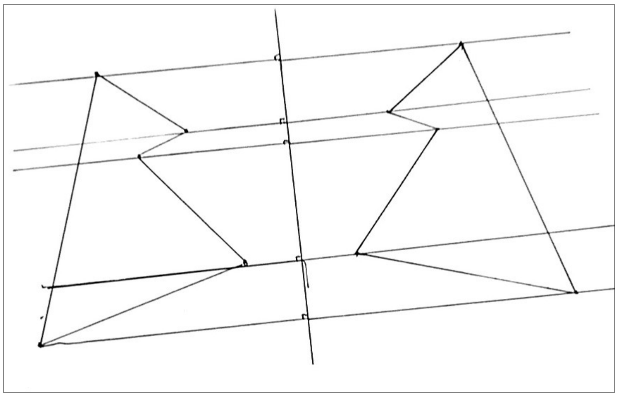
Revenons à la classe et à l'humble quotidien : ayant eu en mains plusieurs de ces « chefs d'oeuvre », je me suis posé la question des itinéraires personnels dont ils sont les aboutissements, en explorant les productions « à reculons ». Il apparaît ainsi clairement que de manière réfléchie, quelques enfants se fixent des objectifs à long terme et savent s'y tenir avec détermination, parfois sur deux ans !

C'est surtout visible dans le domaine des transformations, mais l'idée fait son chemin dans celui des fonctions...

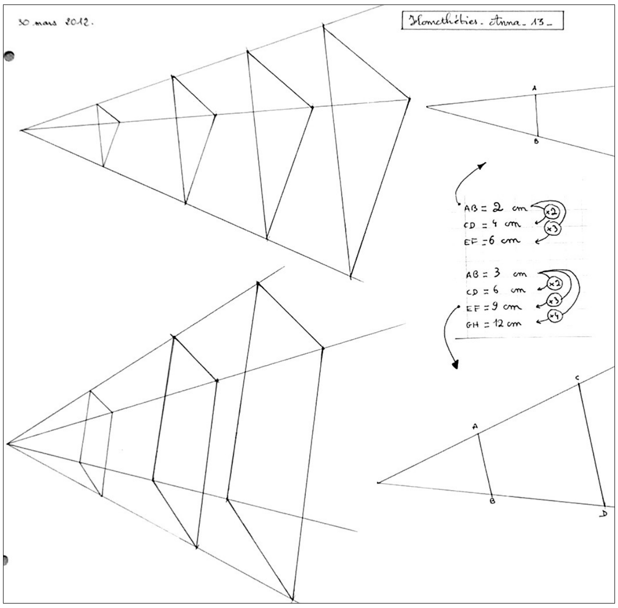
Exemple 2 :

Anna, année scolaire 2011-2012.

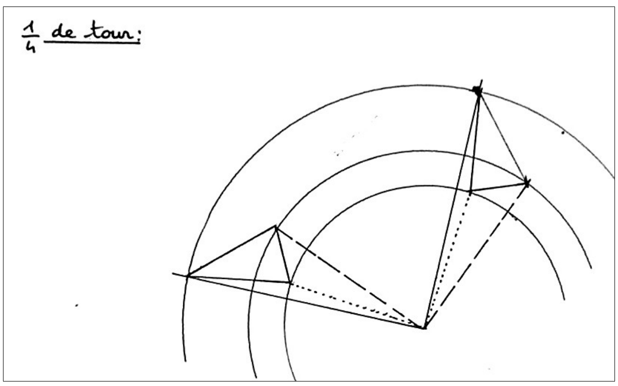
10 février : mise au propre de sa recherche n° 11 sur la symétrie :



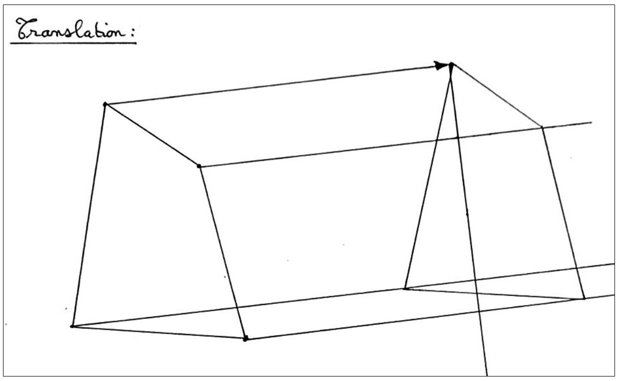
30 mars : mise au propre de sa recherche n° 13 sur l'homothétie :



10 mai : mise au propre de sa recherche n° 14 sur la rotation :

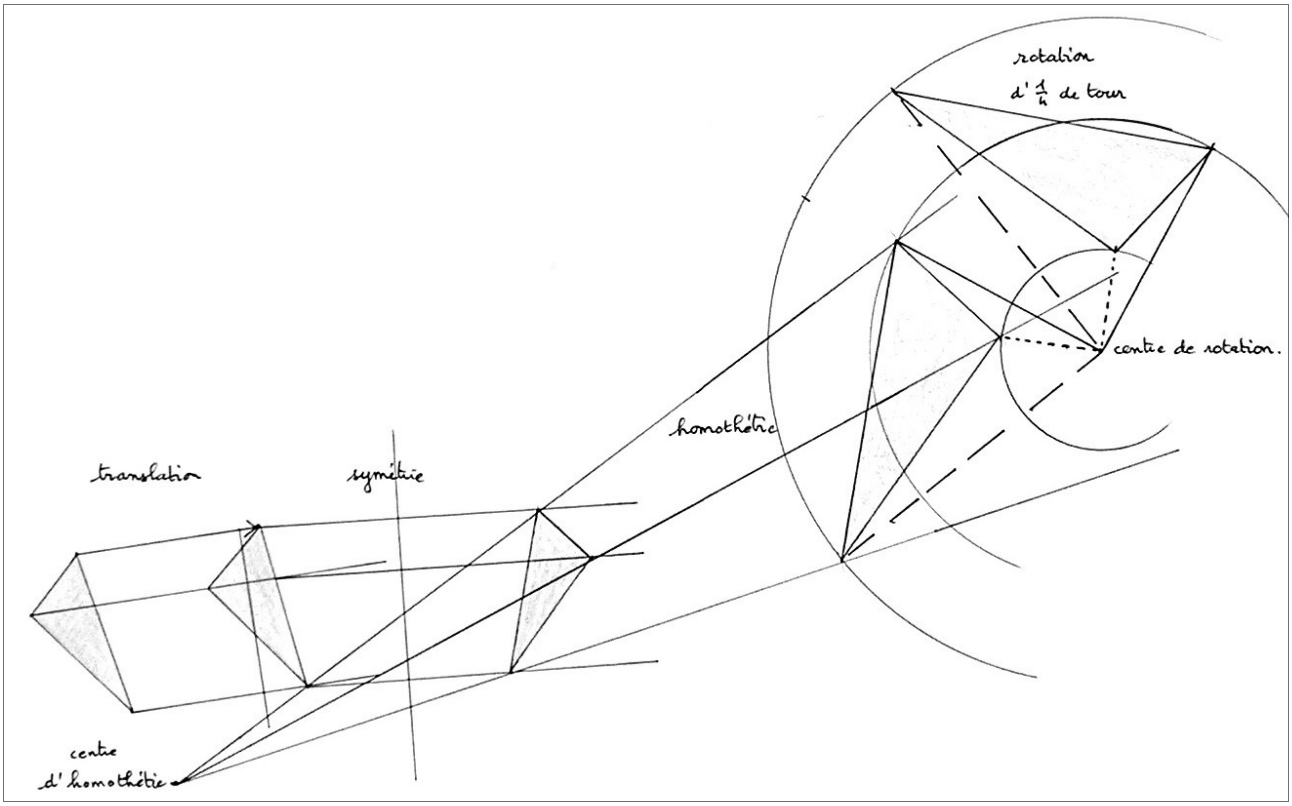


28 mai : mise au propre de sa recherche n° 16 sur la translation :



Puisque Anna maîtrise maintenant théoriquement les quatre transformations, je lui propose de les composer. A sa question : « Dans quel ordre ? », je lui demande « translation – symétrie – homothétie - rotation » pour éviter que la translation soit obtenue par la composition de deux symétries, ce qui ne démontrerait pas la maîtrise d'une technique « directe ». C'est son dernier travail, fin juin.

Le « chef d'oeuvre » d'Anna :

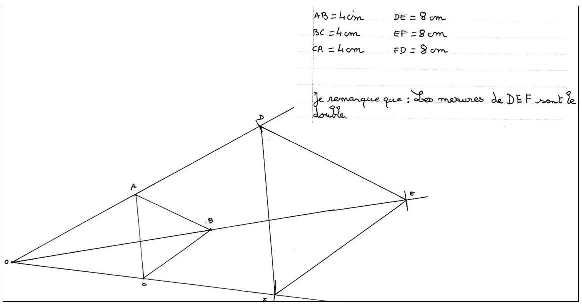


<u>Exemple 3 :</u>

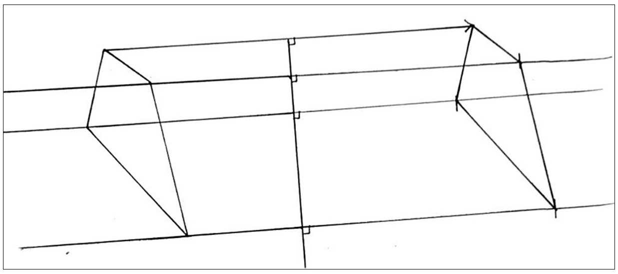
Joséphine, 2011-2012 et année scolaire en cours.

L'exemple est plus parlant encore en termes de vision à long terme, puisque l'itinéraire de Joséphine s'étale sur deux ans, puisque durant l'année scolaire 2011-2012, c'est une élève dont j'avais la charge parmi les quelques CE2 de ma classe, et que naturellement, elle est restée avec moi en CM1 pour 2012-2013. Situation « luxueuse » car permettant justement des constructions de savoirs très cohérentes, sans « temps morts » de réadaptation à une nouvelle classe. La conceptualisation et l'acquisition des moyens techniques des transformations géométriques ont donc commencé en 2011-2012 (homothétie et translation) et se sont poursuivi cette année (symétrie, rotation). Ce n'est cependant que récemment que s'est fait jour le projet d'une sorte de « récapitulation ». Comme Joséphine avait auparavant abordé le chapitre complexe du traçage des parallélogrammes (avec un angle donné), je lui ai proposé se synthétiser un ensemble de savoirs remarquable pour une élève de CM1 en un « chef d'oeuvre » : faire « passer » un parallélogramme par les quatre transformations !

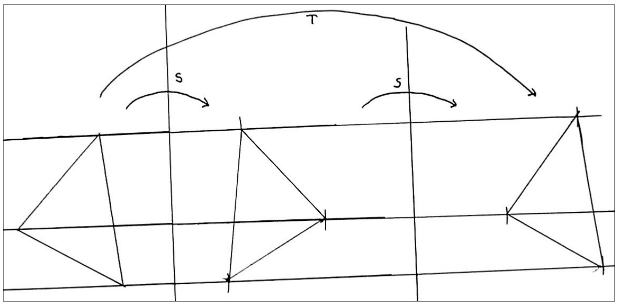
<u>13 février 2012 :</u> mise au propre de sa recherche n° 9 sur l'homothétie :



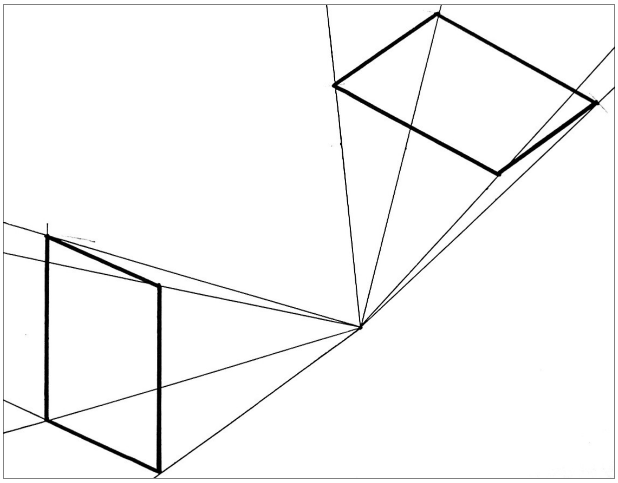
2 avril 2012 : mise au propre de sa recherche n° 10 sur la translation (on remarquera que ces deux recherches se suivent, signe qu'une volonté d'exploration de ce domaine en particulier se fait jour) :



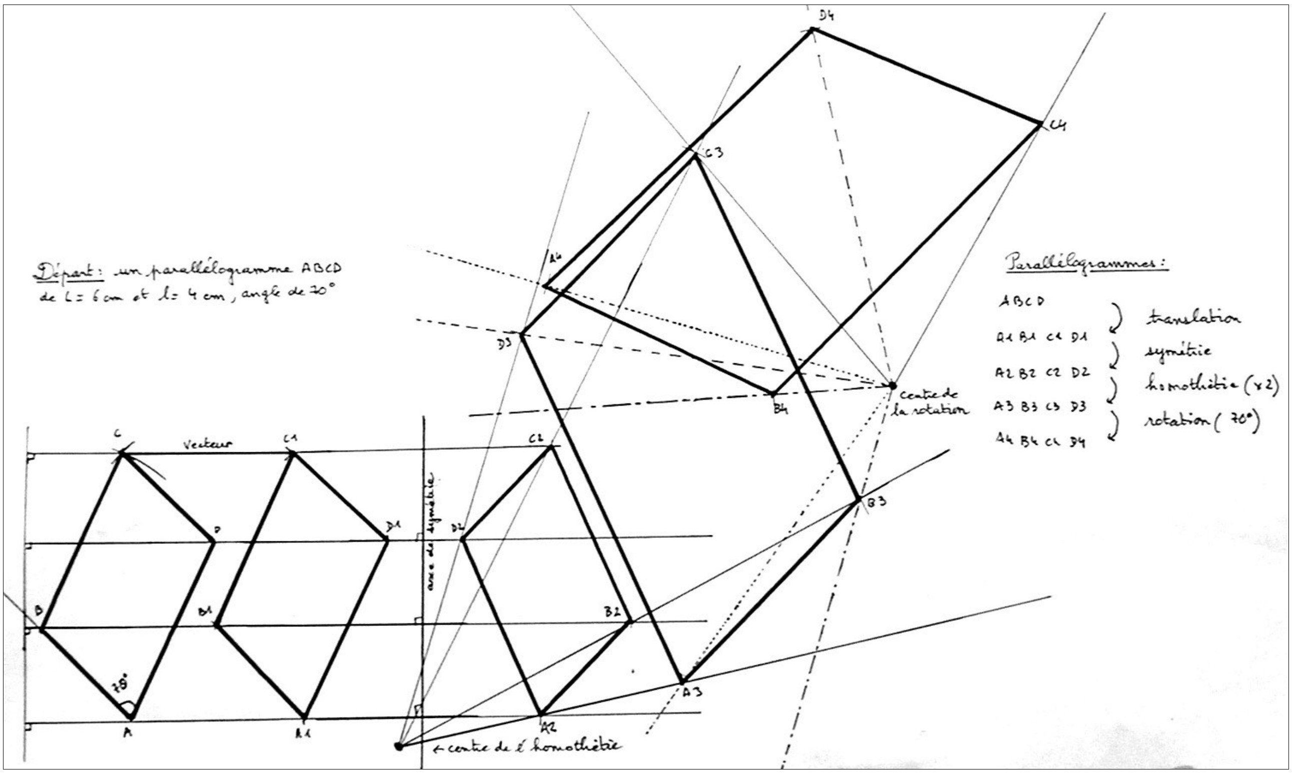
10 septembre 2012 : mise au propre de sa recherche n° 1 sur la symétrie :



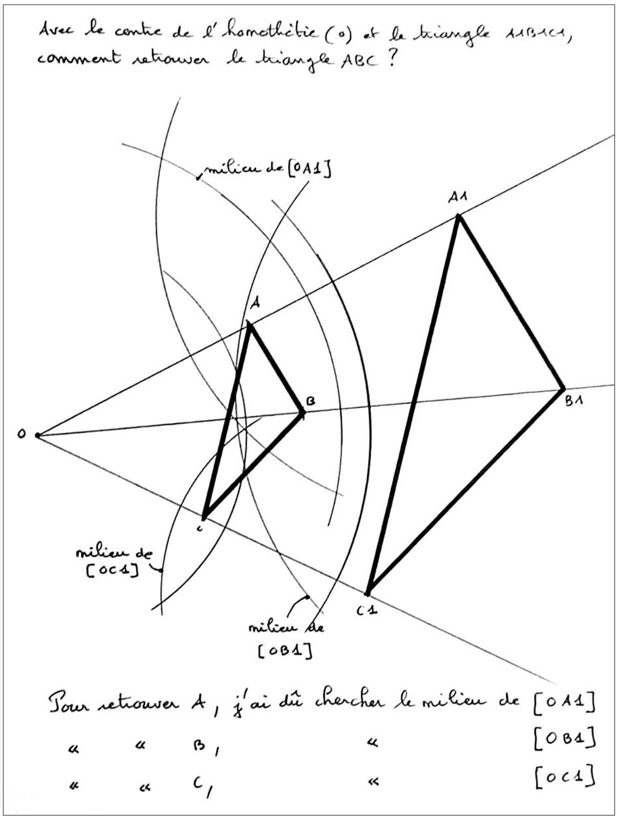
11 février 2013 : mise au propre de sa recherche n° 9, sur la rotation. On notera qu'entre temps, un travail « virtuose » a été mené sur le traçage du parallélogramme, avec un angle donné !



19 mars 2013 : mise au propre de son « chef d'oeuvre » :



On pourrait penser que le « chef d'oeuvre » réalisé, Joséphine se sente parvenue « au bout » de ce genre de travail ; il n'en est rien, car elle se pose ensuite la question de ce qu'elle nomme « l'homothétie à l'envers ». En effet, la plupart du temps, travailler l'homothétie consiste d'abord à « emboîter » des figures (un passage apparemment obligé de tout élève découvrant les joies de l'« invention » mathématique), puis à réaliser de manière exacte une figure « plus grande », dont les mesures seront doubles, triples, quadruples, etc. de celle d'origine. Le défi de la diminution des mesures (moitié, tiers, quart...) est très rarement posé. Une nouvelle recherche vient donc combler la contrariété fondamentale de ne pas détenir une mainmise espérée totale du champ des transformations !

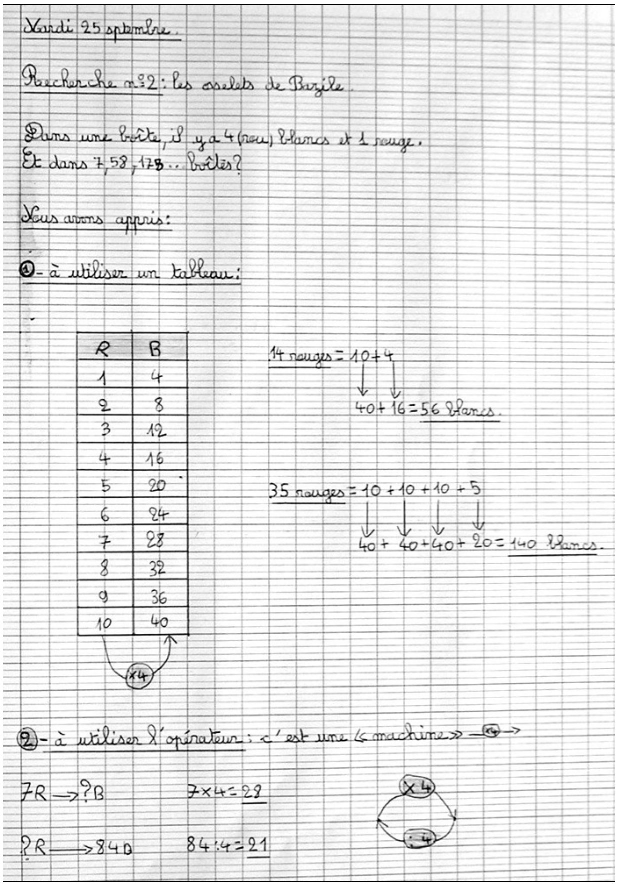


Et les fonctions ?

Deux itinéraires se dessinent ici : un premier concernant le passage de la réalité à l'abstraction, un second dans l'accroissement de la difficulté quant au nombre des opérations utilisées, pour aboutir au « chef d'oeuvre ».

Concernant le domaine numérique (opérations, fonctions), j'ai toujours « insinué » le travail d'« inventions » à partir du collectif. Peut-être à tort, ou par manque de confiance (en moi ? En les enfants ?), on n'y va pas « directement », comme en géométrie. Je m'arrange, en chaque début d'année, pour trouver une situation qui permet une recherche faisant prendre conscience de ce qu'est cette fameuse « machine ». Ensuite, par extrapolation, les élèves peuvent en créer dans leur travail personnel, soit en partant d'une situation réelle, soit en allant directement ou progressivement dans un langage mathématique « pur » (mais en se souvenant toujours, et nous le rappelons à chaque occasion fournie par le « Quoi de neuf ? » – c'est à dire quasiment journellement – que ces « machines » sont partout, tout le temps, autour de nous).

Cette année (2012-2013), le sujet a été abordé dès la recherche collective n° 2, « Les osselets de Bazile ». Bazile avait présenté un « très ancien jouet » lors d'un entretien, et signalé que chaque boîte contenait quatre osselets blancs et un rouge.



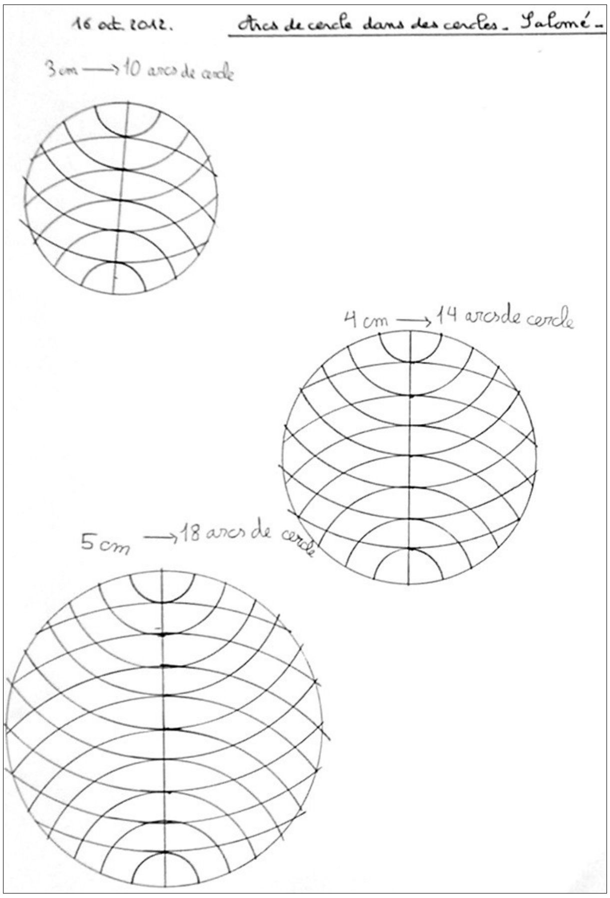
C'est donc à la suite de cette recherche que j'ai proposé aux élèves d'enrichir la palette des possibilités en « inventions » personnelles par ce travail des « machines ».

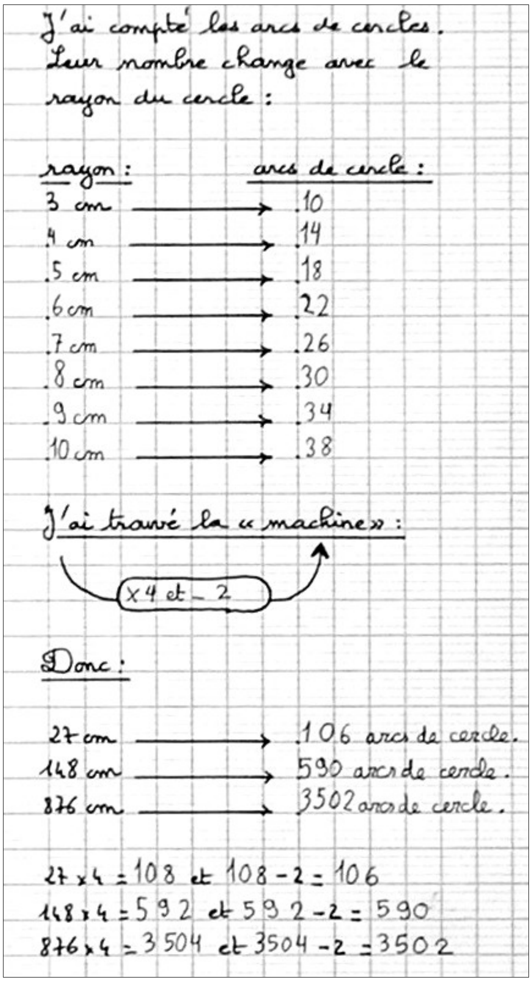
On a alors assisté à une « prise en main » d'abord prudente, comme cette « Machine Chien » qui compte les pattes : 1 chien => 4 pattes, 2 chiens => 8 pattes, 3 chiens => 12 pattes, etc. (donc fonction x 4), mais aussi 20 pattes => 5 chiens, etc. (donc fonction réciproque : 4, et donc qu'une « machine x » deviendra à l'envers une « machine : »).

Il existe parallèlement au moins deux autres entrées dans le domaine numérique en général et celui des fonctions en particulier :

- soit par du calcul basé sur des traçages géométriques qui s'y prêtent,
- soit par du calcul issu de réalisations technologiques d'ateliers, comme les montages « Lego-Dacta ».

Tout cela n'est pas « synchrone » ; il s'agit d'un enrichissement progressif, complexe, parfois tardif, permettant surtout des mises en relation et l'émergence de la parole miraculeuse de toute méthode naturelle : *« C'EST COMME... » !*





J'ai compté les arcs de cercles. Leur nombre change avec le rayon du cercle :

rayon :	arcs de cercle :
3 cm	10
4 cm	14
5 cm	18
6 cm	22
7 cm	26
8 cm	30
9 cm	34
10 cm	38

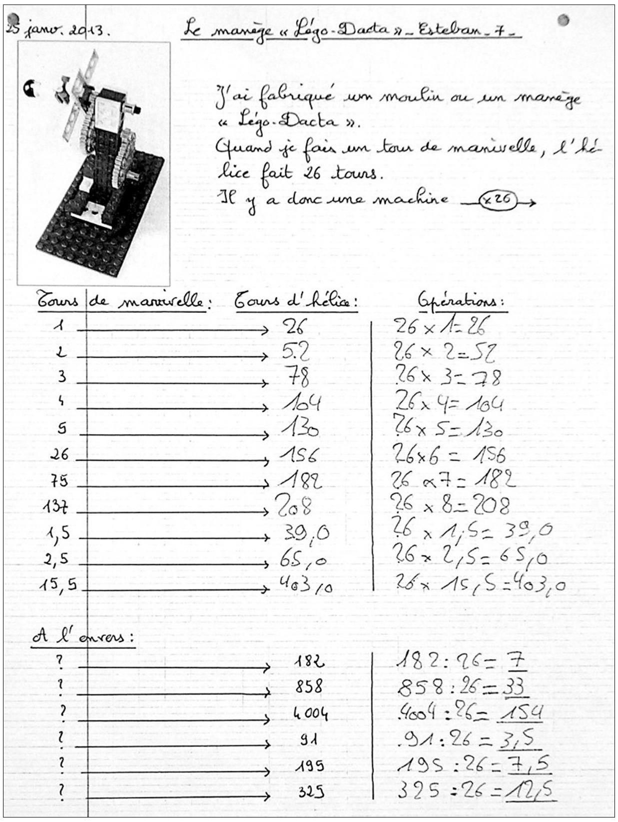
J'ai trouvé la « machine » :

×4 et − 2

Donc :

27 cm → 106 arcs de cercle.
148 cm → 590 arcs de cercle.
876 cm → 3502 arcs de cercle.

27×4 = 108 et 108 − 2 = 106
148×4 = 592 et 592 − 2 = 590
876×4 = 3504 et 3504 − 2 = 3502



25 janv. 2013. Le manège « Légo-Dacta » - Esteban - 7 -

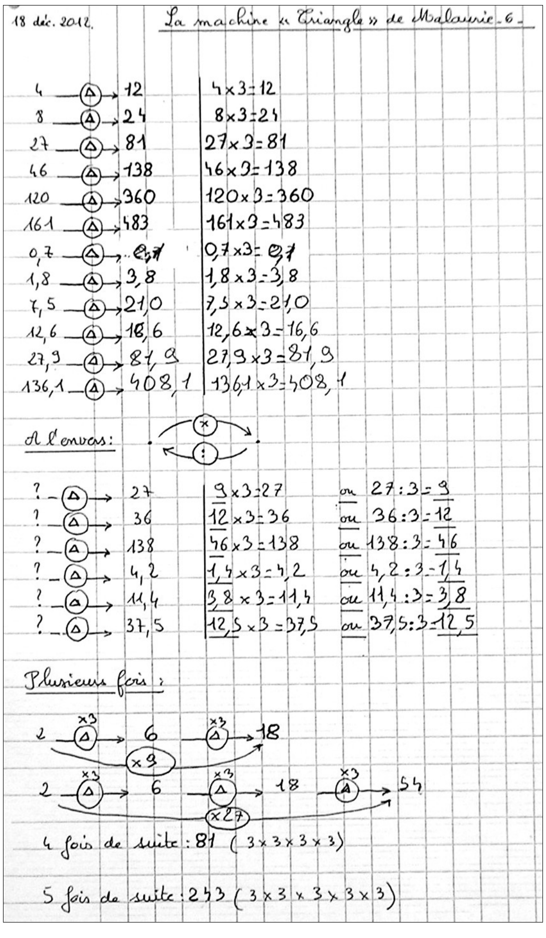
J'ai fabriqué un moulin ou un manège « Légo-Dacta ». Quand je fais un tour de manivelle, l'hélice fait 26 tours. Il y a donc une machine ×26 →

Tours de manivelle :	Tours d'hélice :	Opérations :
1	26	26 × 1 = 26
2	52	26 × 2 = 52
3	78	26 × 3 = 78
4	104	26 × 4 = 104
5	130	26 × 5 = 130
26	156	26 × 6 = 156
75	182	26 × 7 = 182
137	208	26 × 8 = 208
1,5	39,0	26 × 1,5 = 39,0
2,5	65,0	26 × 2,5 = 65,0
15,5	403,0	26 × 15,5 = 403,0

A l'envers :

?	182	182 : 26 = 7
?	858	858 : 26 = 33
?	4 004	4004 : 26 = 154
?	91	91 : 26 = 3,5
?	195	195 : 26 = 7,5
?	325	325 : 26 = 12,5

Un pas est franchi quand on se passe de toute situation pour commencer à « jongler » avec de l'abstraction...



18 déc. 2012. La machine « Triangle » de Malaurie - 6 -

4 → △ →	12	4×3 = 12
8 → △ →	24	8×3 = 24
27 → △ →	81	27×3 = 81
46 → △ →	138	46×3 = 138
120 → △ →	360	120×3 = 360
161 → △ →	483	161×3 = 483
0,7 → △ →	[illegible]	0,7×3 = [illegible]
1,8 → △ →	3,8	1,8×3 = 3,8
7,5 → △ →	21,0	7,5×3 = 21,0
12,6 → △ →	16,6	12,6×3 = 16,6
27,9 → △ →	81,9	27,9×3 = 81,9
136,1 → △ →	408,1	136,1×3 = 408,1

A l'envers : × :

? → △ →	27	9×3 = 27	ou 27 : 3 = 9
? → △ →	36	12×3 = 36	ou 36 : 3 = 12
? → △ →	138	46×3 = 138	ou 138 : 3 = 46
? → △ →	4,2	1,4×3 = 4,2	ou 4,2 : 3 = 1,4
? → △ →	11,4	3,8×3 = 11,4	ou 11,4 : 3 = 3,8
? → △ →	37,5	12,5×3 = 37,5	ou 37,5 : 3 = 12,5

Plusieurs fois :

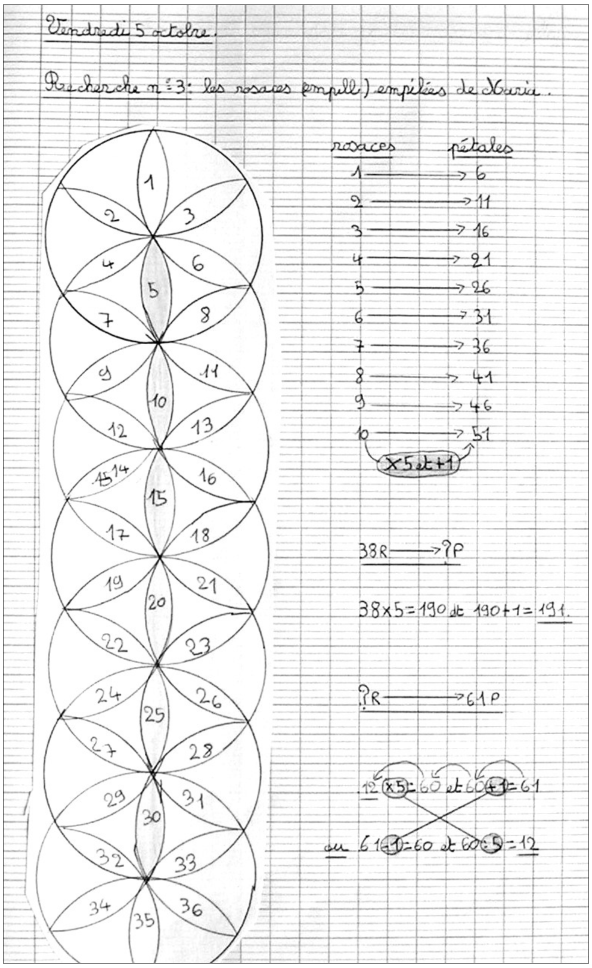
2 →(×3) △ → 6 →(×3) △ → 18 (×9)

2 →(×3) △ → 6 →(×3) △ → 18 →(×3) △ → 54 (×27)

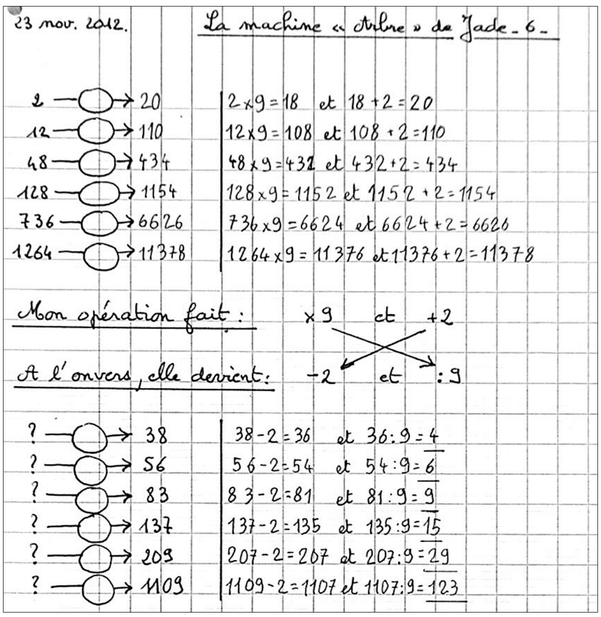
4 fois de suite : 81 (3×3×3×3)

5 fois de suite : 243 (3×3×3×3×3)

Un autre pas peut être franchi lorsqu'on a affaire, en recherche collective, à une « machine » mobilisant deux opérations, comme celle-ci, à partir d'un « empilement » de rosaces :



La voie est alors ouverte pour la complexification des inventions, comme en témoigne cette fonction « Arbre » de Jade :



Enfin, comme en géométrie de transformation, l'idée du « chef d'oeuvre » peut apparaître. Il est cette année défini comme l'invention d'une machine utilisant les quatre opérations, que l'on fera fonctionner « à l'endroit » avec des entiers de plus en plus grands et avec des décimaux, puis « à l'envers » (fonction réciproque), et que l'on représentera graphiquement, avec recherche de résultats directement sur la courbe.

Reste un questionnement qu'il me paraît prudent de poser. J'ai dit plus haut tout mon respect pour ces ouvriers d'élite que sont les Compagnons du Devoir et ce que le « chef d'oeuvre » recouvre. C'est le mot « élite » qui peut poser problème.
D'abord, ces itinéraires discernables sont-ils majoritaires ? Bien difficile à dire ! Il y a probablement bien des cas de figure, entre ce qui relève du complet hasard (compte tenu de ce qui est imposé, c'est à dire l'alternance entre géométrie et numérique), de projets à court terme et de parcours réfléchis menés avec détermination...
De plus, les élèves ne sont pas isolés ; ils agissent au sein d'une communauté ayant ses interactions, ses communications occultes échappant à l'adulte ! La « lecture » de ce qui se passe est donc particulièrement brouillée par de multiples paramètres !
Et s'il est vrai que le maître éprouve une belle satisfaction à voir certain(e)s de ses élèves accéder à ce beau Travail, il n'en reste pas moins que le souci qu'il lui faut toujours garder en tête est celui de toutes celles et tous ceux qui, de part leurs difficultés, sont, se croient ou qu'on croit incapables d'accéder à un tel niveau de maîtrise.
Faut-il alors glorifier le « chef d'oeuvre », le poser d'emblée comme point de mire, le faire apparaître comme l'évaluation ultime du savoir accumulé ?
C'est extrêmement complexe et de pense qu'il faut « protéger » les élèves de la tentation de ne plus travailler que dans ce but. N'oublions pas, par ailleurs, que la « motivation intrinsèque » repose en grande partie sur le « sentiment d'autodétermination » et que la liberté de choix d'un objet de travail est tout à fait essentielle. Ces réalisations remarquables sont des exceptions et peuvent le rester. Le triomphe personnel de Dylan parvenant à tracer enfin un carré à peu près carré n'est pas moins digne d'éloges que les acrobaties géométriques d'Anna ou de Joséphine qui nous fascinent tant, et toute réussite, si modeste soit-elle, DOIT être signalée.
Autrement dit, concept pédagogique à manier avec des pincettes !

« Chef d'oeuvre » d'Esteban dans le domaine des fonctions :

4 avril 2013. CHEF D'ŒUVRE - La machine « N » d'Esteban - 13 -

Ma machine « N » fait : 5 et + 5 et × 5 et − 5.

140 → (N) → 160	140 : 5 = 28 et 28 + 5 = 33 et 33 × 5 = 165 et 165 − 5 = 160
235 → (N) → 255	235 : 5 = 47 + 5 = 52 × 5 = 260 − 5 = 255
2,5 → (N) → 22,5	22,5 : 5 = 4,5 et 4,5 + 5 = 5,5 et 9,5 × 5 = 47,5 et 47,5 − 5 = 42,5
17,5 → (N) → 37,5	17,5 : 5 = 3,5 et 3,5 + 5 = 8,5 et 8,5 × 5 = 42,5 et 42,5 − 5 = 37,5
63 → (N) → 83	63 : 5 = 12,6 et 12,6 + 5 = 17,6 et 17,6 × 5 = 88 et 88 − 5 = 83
187 → (N) → 207	187 : 5 = 37,4 et 37,4 + 5 = 42,4 et 42,4 × 5 = 212 et 212 − 5 = 207
12,5 → (N) → 37,5	12,5 : 5 = 2,5 et 2,5 + 5 = 7,5 et 7,5 × 5 = 37,5 et 37,5
28,5 → (N) → 48,5	28,5 : 5 = 5,7 et 5,7 + 5 = 10,7 et 10,7 × 5 = 53,5 et 53,5 − 5 = 48,5
136,5 → (N) → 156,5	136,5 : 5 = 27,3 + 5 = 32,3 et 32,3 × 5 = 161,5 et 161,5 − 5 = 156,5

Finalement, ça fait toujours + 20.

A l'envers :

? → (N) → 45	45 + 5 = 50 et 50 : 5 = 10 − 5 = 5 et 5 × 5 = 25
? → (N) → 55	55 + 5 = 60 et 60 : 5 = 12 et 12 − 5 = 7 et 7 × 5 = 35
? → (N) → 175	175 + 5 = 180 et 180 : 5 = 36 et 36 − 5 = 31 et 31 × 5 = 155
? → (N) → 27,5	27,5 + 5 = 32,5 et 32,5 : 5 = 6,5 et 6,5 − 5 = 1,5 et 1,5 × 5 = 7,5
? → (N) → 48,5	48,5 + 5 = 53,5 et 53,5 : 5 = 10,7 et 10,7 − 5 = 5,7 et 5,7 × 5 = 28,5
? → (N) → 147,5	147,5 + 5 = 152,5 et 152,5 : 5 = 30,5 et 30,5 − 5 = 25,5 et 25,5 × 5 = 127,5

Finalement, ça fait toujours − 20.

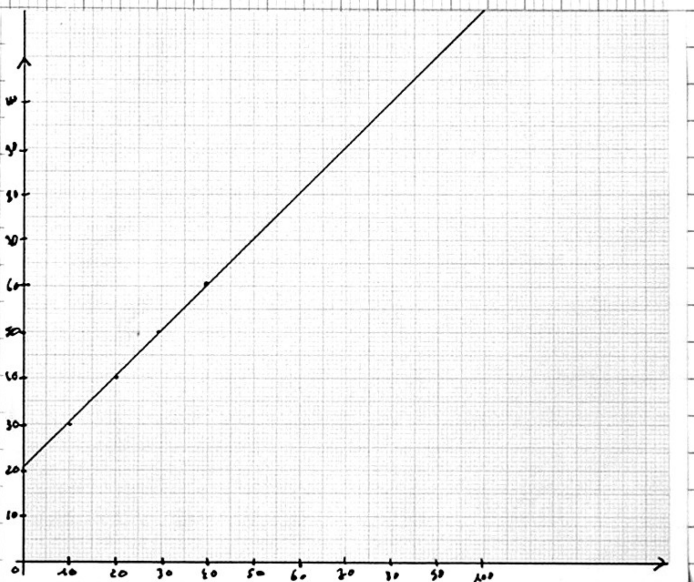
J'ai compris que :

à l'endroit : : 5 et + 5 et × 5 et − 5

à l'envers : + 5 et : 5 et − 5 et × 5

Courbe :

10 → 30
20 → 40
30 → 50
40 → 60
50 → 70



... on peut lire directement sur la courbe d'autres résultats :

60 → 80
70 → 90
80 → 100
etc. → etc.

J.M. Guerrien, école Lamartine, Dunkerque, mai 2103.