Le point d'inflexion

Bulletin du secteur mathématiques de l'ICEM-Pédagogie Freinet

Février 2022

Éditorial

Outre sa signification mathématique, le *point d'inflexion* c'est aussi le moment où tout bascule. Par exemple le moment où, lassé de la scolastique établie, on franchit le pas de la méthode naturelle. On ne prend pas la tangente, non, on ne fuit pas, on ne dérive pas non plus, mais on inverse la courbe didactique. Rompant avec l'illusion que nos pleins pouvoirs vont réussir à inculquer des notions à des élèves passifs, on comprend un jour qu'on pourrait croire en leurs capacités, les mettre sur la voie d'apprendre par eux-mêmes, de devenir auteurs de leurs savoirs, et, pourquoi pas, de ressentir l'ivresse de la découverte.

Le Point d'Inflexion donc, nouveau bulletin du Secteur Math de l'ICEM, a l'ambition de nous aider à opérer ce basculement. Nous y partagerons nos essais, nos hésitations, nos réussites, nos réflexions, nos ambitions, nos progrès, nos propres découvertes… avec ce temps de recul qui permet de se poser, de faire le point, de confronter ses savoirs.

Le Point d'Inflexion nous aidera ainsi à réassurer nos propres savoirs mathématiques. Peut-être même qu'il nous donnera une confiance suffisante pour sortir de la droite toute tracée des mathématiques scolaires et pour tenter l'aventure au pays des mathématiques indociles et sauvages… Grâce à ce basculement, nous atteindrons alors le plaisir de les comprendre et le bonheur de les enseigner autrement.

Libre à chacun de s'aventurer seul, mais, sous le regard positif des uns et des autres, la mutualisation des pensées et des expériences nous rend plus forts. Nous vous invitons donc, chers lecteurs, à devenir écriveurs, car vous savez que c'est en écrivant que l'on commence à comprendre ce qu'on ne soupçonnait qu'à peine.

À vous lire, donc.

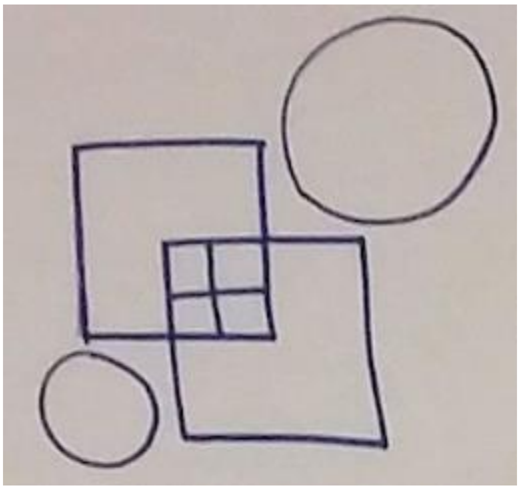
Rémi Jacquet

Nos ateliers au congrès

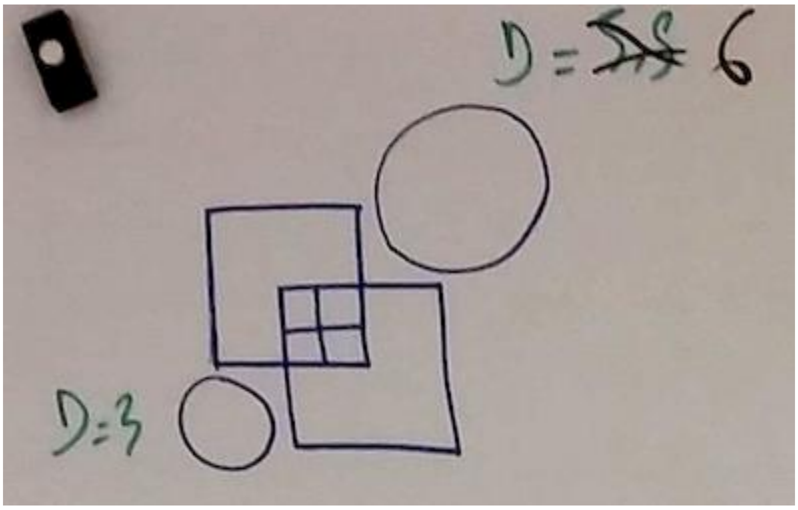
Un article de Rémi Brault

Un groupe avait choisi "proportionnalité" comme thème (le groupe initial était trop important).
Je voudrais pointer la nécessité d'avoir à cœur le travail de recherche (résolution de problème) pendant une séance de création pour qu'elle ne se résume pas à une discussion du café du commerce, quel que soit l'intérêt de la discussion.

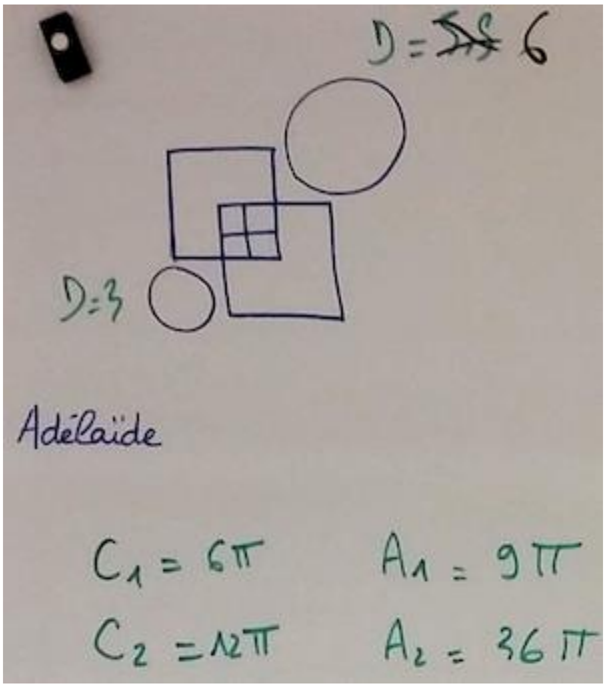
Nous traitions de :



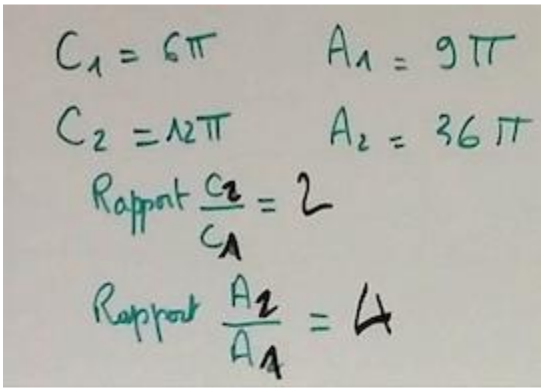
Au cours d'une discussion sur le rapport de taille entre les petits et les grands carrés qui pouvait être le même que celui entre le petit et le grand cercle a émergé une question à partir de l'affirmation "De toute façon, le rapport des longueurs ou des aires, ce sera pareil."
"Sûr ? Vérifions, calculons." (La réponse n'était pas évidente pour la majorité des participants.)
À ce moment, l'attention était tournée vers les cercles.
On mesure, mais en même temps (particularité importante en méthode naturelle : on a des droits sur les données) on simplifie pour aller plus vite :



Là, tout le monde se met **individuellement** en recherche... et calcule :



et cherche les rapports en question :



Finalement, l’affirmation était fausse.

Il aurait été intéressant, après la résolution , de revenir sur « le rapport de taille entre les petits et les grands carrés et entre le petit et le grand cercle. »

Évidemment, 2 ou 3 personnes auraient sûrement pu l'expliquer rapidement sans qu'il y ait recherche, mais ça aurait été au détriment du travail de tous les autres.

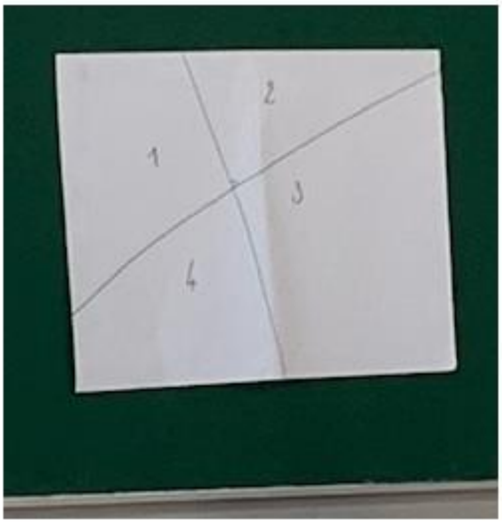
C'est un point important de l'animation d'une séance en MNM à partir de créations : la nécessité de permettre à tous de travailler réellement, faire ce qu'il faut pour qu'une question issue de l'événement devienne problématique et qu'elle puisse être traitée par tous.

Coopémathématiquement,
Rémi Brault

Un article de Xavier Fleury

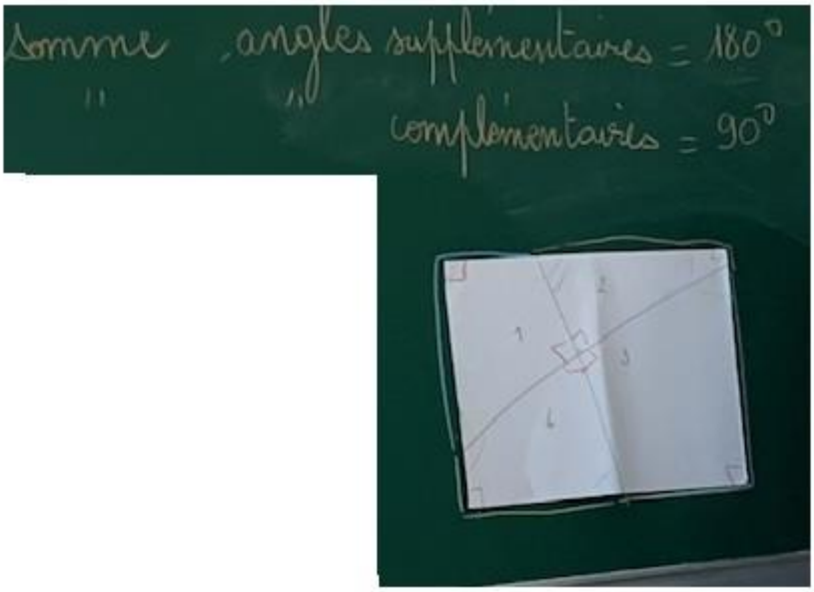
Un des deux groupes a choisi pour thème « Diviser » et a produit une douzaine de créations sur ce thème :

<u>1 er exemple</u>



Création « brute »

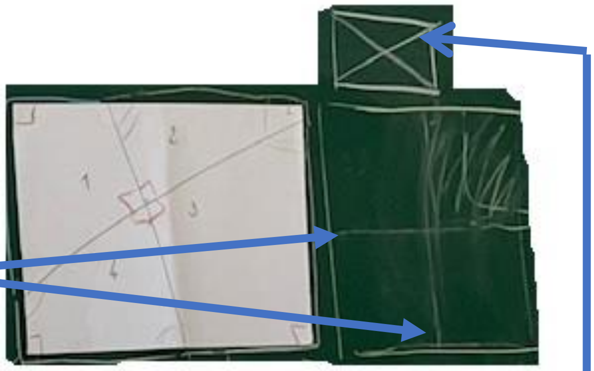
Remarque sur les angles des quatre quadrilatères qui apparaissent dans la figure.



Chacun de ces quadrilatères a deux angles de 90°. La somme des angles d'un quadrilatère fait 360°. Donc la somme des deux autres angles fait 180°. Dit-on qu'ils sont complémentaires ? supplémentaires ? plutôt supplémentaires.

Comment vérifier que la somme des angles d'un quadrilatère quelconque fait 360°. On découpe et on assemble …

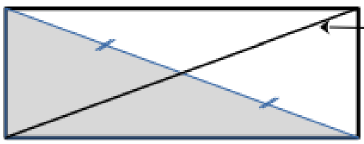
Problème :



Remarque sur la partition de la feuille de papier en 4 surfaces : les aires de ces quatre surfaces ne sont pas égales. Comment aurait on pu faire pour qu'elles soient égales ? Si la feuille avait été partagée par ses deux médianes les quatre aires auraient été égales.

Et si l'on partage par les diagonales, est-ce que les quatre aires obtenues sont égales ?

En fait les quatre triangles obtenus lorsqu'on trace les diagonales d'un rectangle ont tous la même aire. En effet, comme les diagonales se coupent en leur milieu, chaque diagonale est une médiane d'un triangle rectangle. Elle sépare ce triangle rectangle en deux triangles de même aire (propriété d'une médiane d'un triangle).



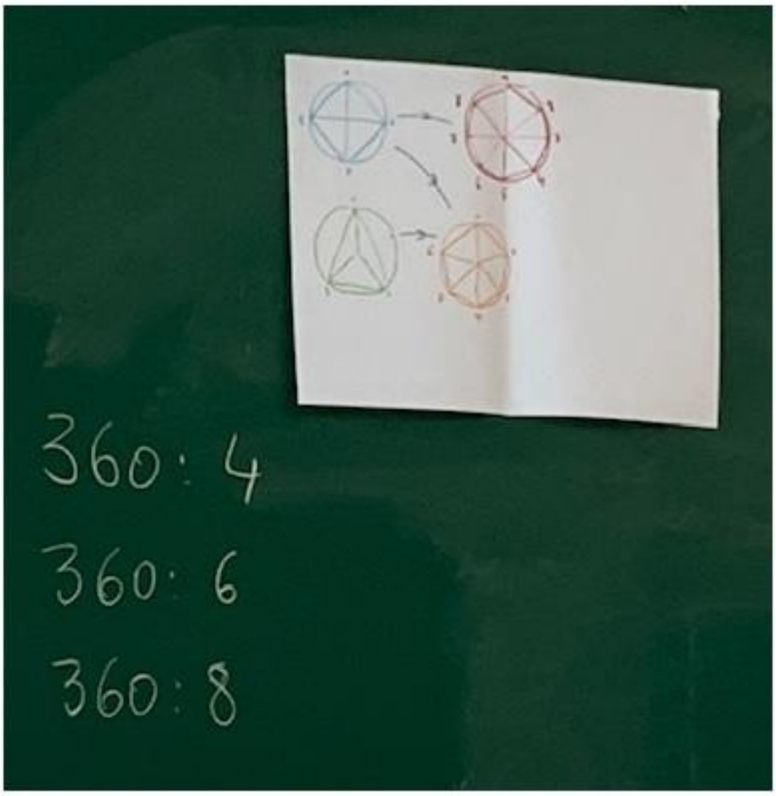
Cette diagonale est une médiane du triangle rectangle gris.

Le dessin fait penser à un champ… formulation d'un problème :

<u>2e exemple :</u>

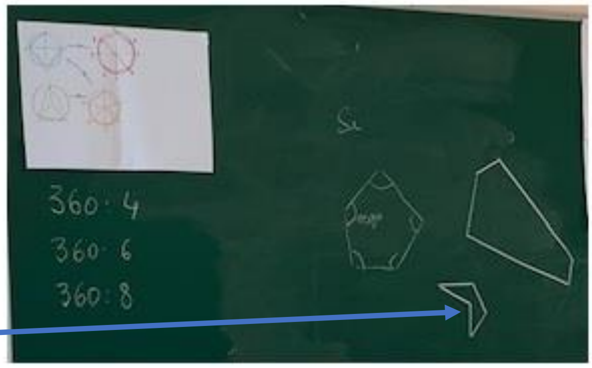
Création « brute »

Les angles au centre des polygones réguliers sont considérés.



On fait les divisions nécessaires pour les obtenir dans le cas du carré, de l'hexagone, de l'octogone.

Question : combien fait la somme des angles d’un polygone ? Pour un quadrilatère, on a dit que cette somme était égale à 360°. Mais pour un pentagone ? ce n’est pas 360° car si le pentagone est régulier chaque angle fait 108° (comment calcule-t-on cela ?).

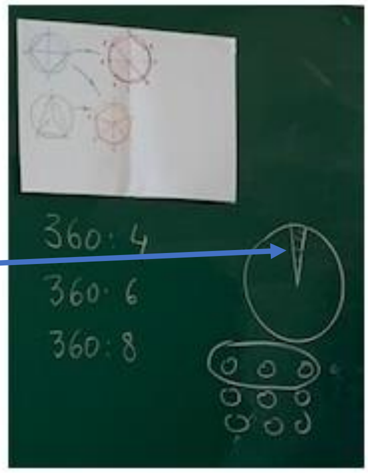


Et donc la somme fait 540°.

Est-ce que c’est vrai pour tous les pentagones ? Même les « bizarres » ?

Il faudrait essayer, dessiner, découper, assembler ...

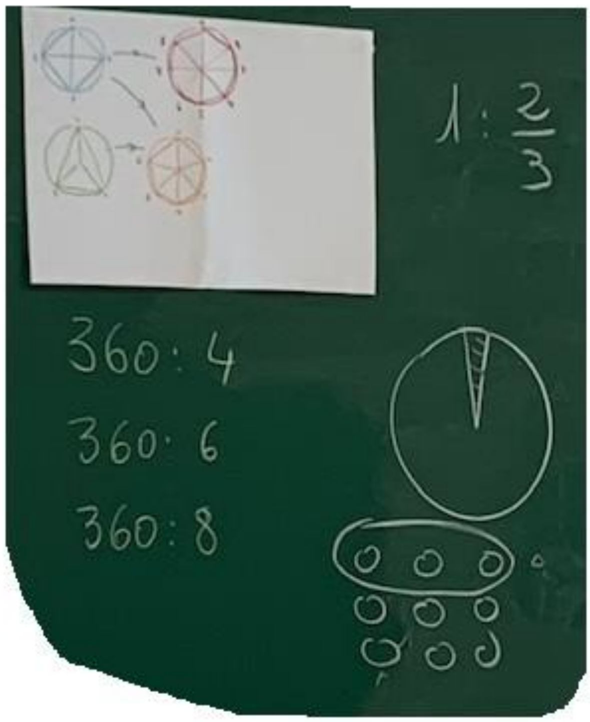
Jusqu’ici on a fait des partages (de surface, d’angle), on a utilisé la division correspondant à un partage mais la division a un autre sens : par exemple, avec 9 unités combien peut-on faire de parts de 3 unités chacune ?



Ou plus compliqué : avec un gâteau, combien de parts de taille arbitraire ?

Simplifions ce dernier problème : avec 1 gâteau combien de parts de 2/3 ? Avec deux gâteaux ?

Comment calculer ?

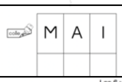


Discussions sur la liste vivamath

Demande de Béatrice

Mes premiers pas avec la bonne idée

Je suis enseignante en PS-GS et je voulais me lancer depuis longtemps dans l'atelier de la bonne idée afin de vraiment faire travailler mes élèves en méthode naturelle en mathématiques.
J'ai mis un moment à m'y mettre mais cette année j'ai inclus cet atelier dans le plan de travail des GS. Les enfants ont dans un premier temps travaillé avec les oursons de couleur. Ils ont à leur disposition une espèce de plateau rectangulaire sur lequel ils doivent trouver une idée de rangement des oursons. Après cet atelier, je leur demande de me dire quel rangement ils ont effectué puis je valide si le rangement est mathématique. Je prends une photo que j'imprime pour pouvoir présenter au groupe ultérieurement. À son tour, celui-ci nous donne des nouvelles idées de rangement.
Souvent, les enfants ne savent pas trop comment ranger. Ils peuvent partir sur des histoires : « c'est une fusée qui part dans l'espace… ». À ce moment-là, je leur dis que c'est une belle création mais pas un rangement mathématique (sur leur plan de travail, ils ont une partie « création » avec le dessin-histoire ou la peinture ou le découpage-collage).

<table>
<tr><th colspan="2">TI</th><th>Expression / création</th><th colspan="2">Projets</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="3">Peinture libre
</td><td rowspan="3">TIC TAC TOE
</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="4">Dessin-histoire

</td><td rowspan="4">Escargots
</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>coloriage
</td><td></td></tr>
<tr><td>La bonne idée
</td><td></td></tr>
</table>

On essaie de trouver ensemble, à partir de ce qu'ils ont réalisé, ce qu'on peut trouver de mathématique. C'est ce moment-là qui me semble très important dans leur acquisition des mathématiques : ils construisent une notion avec un cheminement propre à chacun.

Les rangements sont assez divers : en colonnes et par couleurs, en algorithme, rangement 3 par 3, 2 traits et un rond… J'essaie de donner le vocabulaire mathématique quand ils formulent avec moi : ligne plus que trait, cercle plus que rond.

Une fois que les enfants ont bien utilisé le matériel, je change le matériel et je relis toutes les photos pour en faire un recueil. Il devient alors un référent pour la classe.

Dans un deuxième temps, nous avons utilisé du papier cadeau avec des motifs, des couleurs et des tailles différentes.
De la même manière, les enfants ont cherché, formulé, confronté.

La deuxième création a suscité un grand débat pour reproduire la pyramide. Comment Nesrine a-t-elle fait pour la faire ? De nombreuses hypothèses, essais… ont été faits par les élèves. Pour le reste, on était sur les algorithmes, les formes géométriques, les diagonales.

Mes soucis et interrogations : je ne suis pas du tout à l'aise avec les notions mathématiques moi-même : un de mes questionnements était de savoir si on pouvait faire un cercle ou un carré avec des disques. Est-ce que mathématiquement c'est valide ? C'est la même question pour le triangle.

Mes connaissances dans le domaine me limitent donc grandement et je ne sais pas toujours comment accueillir les propositions des élèves, comment je peux les faire avancer et évoluer.

Réponse de Rémi Brault

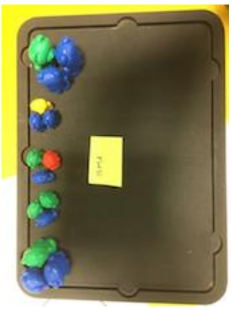
-"...si on pouvait faire un cercle ou un carré avec des disques. Est-ce que mathématiquement c'est valide ? C'est la même question pour le triangle."
En fait, cercles, carrés, triangles, ce sont des idéalités. On peut donc "faire" un cercle ou un carré avec des disques dans le sens où l'on place ces disques sur un cercle ou un carré. Ensuite, on peut vouloir être plus ou moins précis : pour donner un exemple, au CM (après un débat sur ce que veut dire "faire un cercle"), on peut vouloir que le centre du disque soit sur le cercle.
En classe, nous nous amusions souvent avec le fait que les figures existent sans qu'elles soient "faites" (tracées). "Ces 4 points (non reliés sur la feuille) sont les sommets d'un trapèze !

Réponse de Danielle Thorel

Bonjour Béatrice
J’aime beaucoup ces propositions mathématiques. Ce que tu as fait avec tes enfants est un bon début, très prometteur.
Je vais essayer de répondre aux propositions de tes enfants, je ne sais pas si c’est à leur niveau parce que je n’ai jamais eu de maternelle. Ce que je propose n’est pas forcément à faire, mais à mon avis, il faut être “prête”. Je ne vais parler que ce dont tu n’as pas parlé. Je suis pour agir sur les productions, c’est plus vivant, ça correspond plus au besoin d’action des enfants. Simplement décrire et parler me semble un peu juste et ne permet pas d’entrer vraiment dans les maths à mon avis. Mais il faut aussi parler en faisant.

Ici je vois un travail sur les quantités :“autant que” il y a autant de jaunes que de bleus, il y a autant de rouges que de verts. Je suis pour agir sur les productions, mettre ensemble les colliers “égaux”par exemple pour entrer en math.
La symétrie : ici un axe horizontal, comment changer les couleurs pour que ce soit vraiment symétrique ?

Ici, le rythme “vert, jaune, rouge” ou “rouge, vert, jaune” ou... ça dépend par où on commence. Combien de façons y a t-il d’identifier le rythme ?
Est-ce vraiment un cercle ? Pourquoi ? Il est allongé. On peut essayer de le faire mieux. Comment on va faire ?



Ici, les groupements par 3. Agissons : Et si on groupait par 2, que se passe-t-il ? Par 4 ? Il y a un “reste” ?

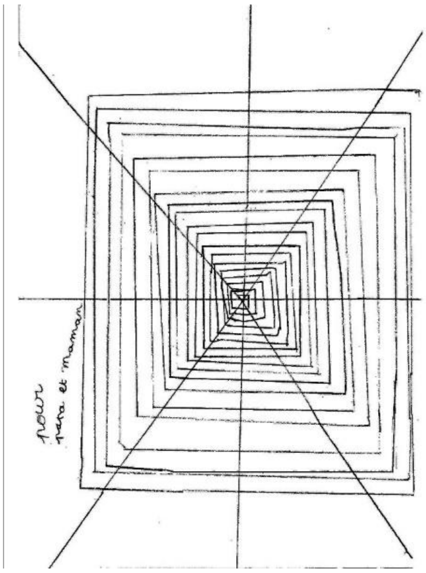
Encore “autant que” (les deux lignes). Y a-t-il autant de jaunes que de rouges ? ... chercher les quantités égales (en couleur) quitte à les prendre et les compter.

Alors là, magnifique ! Des lignes de 10. Certains GS savent compter jusqu’à 40 non ?

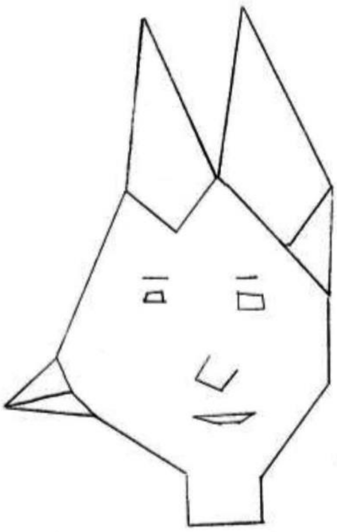
Demande de Marion

Bonjour à tous,

J'ai beaucoup travaillé en création mathématique collective avec mes élèves de CP/CE1 depuis le début de l'année.
Je sens que je manque encore d'un regard mathématiquement aiguisé. Je vous propose 2 productions.



La création 1 a été faite par une petite fille qui a eu sa série de formes "concentriques". Là j'ai l'impression que c'est plutôt une spirale. Nous ne l'avons pas encore observée et d'avoir vos regards pourrait m'aider à entrevoir de nouvelles choses. J'aurais aimé aussi pouvoir lui proposer des pistes pour prolonger son travail. Un petit "et si..."



La n°2 a été observée par les élèves qui y ont remarqué des formes, ont vérifié des angles droits, ont vu un double visage : de profil et de face. Mais j'ai toujours l'impression qu'on passe à côté de quelque chose.

Une chose aussi que je n'arrive pas encore à faire, c'est à garder une trace écrite après ces temps de créations : leçon? liste des notions évoquées ? À chaque fois ? ...

J'attends vos remarques.

Réponse d’Alexandrine

Bonjour, Marion

Allez, je me lance dans une petite réponse rapide puisque pour une fois j'ai un peu de temps...
Moi aussi j'essaye les créations math avec des CE2 que j'ai à 1/2 temps mais j'ai l'impression de tourner en rond ou de ne pas beaucoup avancer parfois. Aussi j'ai tendance à vouloir reprendre le contrôle mais je sens que je suis en train de perdre un certain nombre d'entre eux (surtout qu'à mi-temps, avec les aléas du calendrier, les séances sont parfois très espacées).
Je précise que comme je m'occupe de numération et de calcul, j'ai un peu orienté leurs productions en leur demandant d'éviter la géométrie et quand il y en a, on le dit mais on ne le traite pas.
Personnellement, je fais une trace écrite des notions abordées toutes les 2 ou 3 séances ; nous la relisons ensemble (ce qui parfois amène à reparler de certaines notions) et je donne à relire à la maison, avec parfois des exercices intégrés ou en parallèle. Je mets un exemple en pièce jointe.
Un des avantages que j'ai vu à cette "liste", c'est que ça me permet de voir que finalement, nous y faisons pas mal de travail, et notamment du travail de fond. Un des inconvénients, c'est que plusieurs parents se sont trouvés perdus pensant que c'était une/des leçons à apprendre ?)

Alexandrine

Réponse d’Olivier

Bonjour Marion,

Ce que je peux dire c'est le genre d'idées qu'ont pu avoir mes élèves devant ce genre de créations.

Création 1
Souvent, ils adoraient voir les choses en 3D. Ça discutait fort sur "on est à l'intérieur" ou "on est à l'extérieur". Problèmes : ajustements, distances, vue de dessus, vue de dessous, vue de côté...
Distance --> homothétie, coefficient de réduction, perspective...

Création 2
Chercher les angles droits, pourquoi pas ? Mais est-ce que ça a du sens ici ?
J'ai toujours dit (aux élèves) qu'on cherchait à donner du sens et qu'on traitait les problèmes que ça peut poser.
Il y a donc nécessité d'être à l'écoute des conflits cognitifs qui peuvent surgir dans cette recherche de sens. Certains parlent de débat, ce qui signifie que tout le monde n'est pas d’accord.
En ce qui concerne les "visages", j'ai parfois amorcé la réflexion ainsi : "Tu parles de visage, alors que ce ne sont que des traits de feutres sur du papier. Pourquoi ?", "Quelle(s) relation(s) entre les lignes sur la feuille et l’objet réel ?", "Qu'est-ce qui est pareil, pas pareil ?".

Coopérativement,

Réponse de Céline

Bonjour Marion

Je trouve le travail de tes CP/CE1 très intéressant ! Woua ! Parfois, mes 6° commencent leurs recherches libres avec ce type de production.
L'un avait cherché à tracer des spirales avec des arcs de cercle, je lui avais fait chercher différentes méthodes, il avait galéré.

Pour la première, la spirale est différente des carrés concentriques, en ce que les « diagonales » qu'elle a tracées ne peuvent pas lui servir.
En prolongement, si elle était en 6°, je lui demanderais comment elle pourrait expliquer sa méthode de construction aux autres élèves, pour la leur proposer ensuite. Mais elle est sans doute un peu trop jeune ? Ou alors sur papier quadrillé ?
En fait, ce n'est pas évident de faire une spirale je m'en rends compte (grâce à elle).
Pour la deuxième, les angles droits, ok, pourquoi pas chercher le nom des différentes formes présentes ? Pour ensuite réinvestir dans la construction de certaines selon ton programme.
Si son dessin montrait une tentative de symétrie, ç'aurait été l'occasion de la lui faire explorer, mais là, ce serait dommage car il est très beau ainsi !
J'ai une élève qui avait commencé un visage (à peu près symétrique) avec des formes géométriques, et comme elles n'étaient pas centrées (le nez, les yeux) alors qu'elle le voulait, elle a travaillé là-dessus.
Voilà, une participation très modeste.

Bonne suite !
Céline

Nos remarques

Création 1 : Quand les enfants accrochent, il y a beaucoup de choses à creuser autour de la 3D et de l'effet tunnel, pour des CP/CE1, il s'agit surtout d'explorer.
La construction sur papier quadrillé pourrait amener des remarques de construction et aussi des remarques numériques sur la suite des segments tracés : 1,1,2,2,3,3,4,4... On pourrait alors faire d'autres « spirales carrées » avec un autre rythme.

Création 2 : Si les enfants ont parlé de « faces » et de « profils » , de visages qui tournent, autant partir là-dessus. Un enfant debout et face à nous, que doit-il faire pour qu'on voit son profil gauche, son profil droit, sa nuque. On peut alors jouer avec les quarts de tour, les demi-tours, les tours complets. Que se passe-t-il s'il fait 3/4 de tour à gauche ? ½ tour à droite ? faire des étiquettes avec des dessins de faces, profils, nuques, jouer avec les opérateurs ¼ de tour, ½ tour, 1 tour, ¾ de tour…

Avec des plus grands :

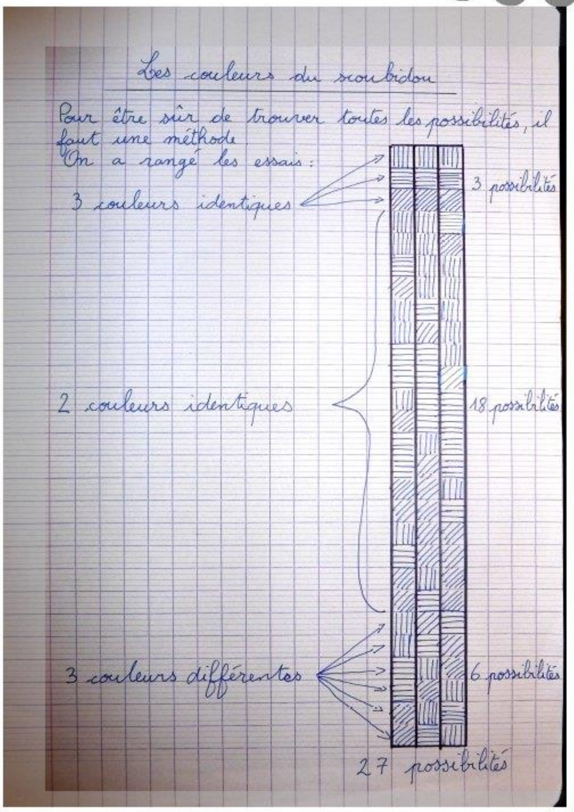
$$\text{PG} \xrightarrow{1/4t} \text{N} \xrightarrow{3/4t} \text{PG}$$

PG=profil gauche N=nuque F face PD= profil droit

Dans l'ensemble des opérateurs, « 1t » est l'élément neutre avec l'opération « composer ».

Envoi d'Olivier CP/CE1

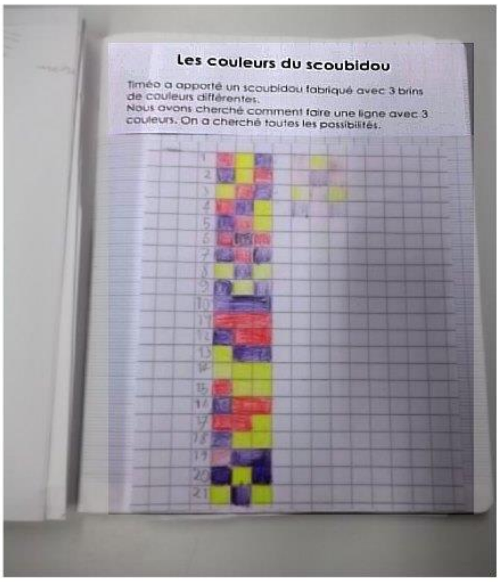
Le scoubidou



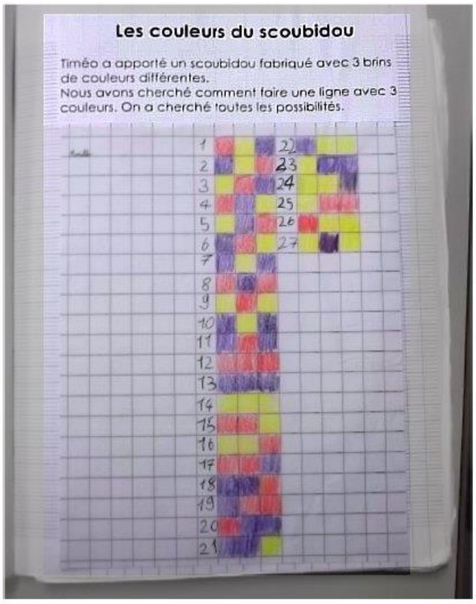
Timéo présente un scoubidou que lui a fabriqué son frère. Un élève lui demande : « Combien de brins a-t-il utilisé ? »
- 3 et c'est 3 couleurs différentes.
Le maitre : « On voit que ça forme des lignes avec des couleurs différentes. »
Le maitre colorie au tableau les combinaisons qu'on voit. « Y en a-t-il d'autres possibles ? »

On est là sur un problème qui relève de la combinatoire où l'on recherche toutes les combinaisons possibles.

Les enfants se lancent en recherche sur du papier quadrillé. Ils colorient les différentes possibilités.
Lorsqu'on fait le bilan, tous n'ont pas trouvé le même nombre de solutions. Certains ont colorié pour faire joli (en cp surtout).
On cherche des stratégies pour trouver toutes les combinaisons.
On relance la recherche en utilisant une méthode, ce qui permet à ceux qui n'avaient pas compris d'essayer de structurer leur recherche.



Recherche non exhaustive d'un ce1



Recherche exhaustive d'un ce1

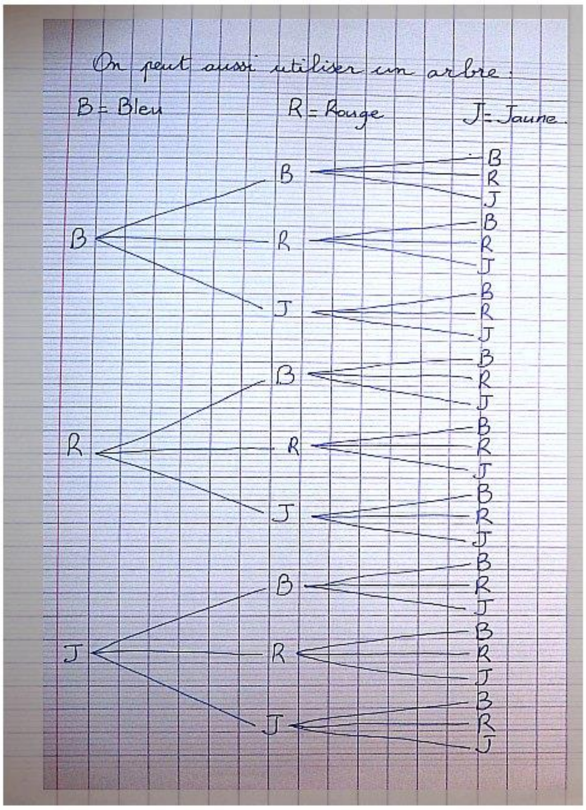
Certains proposent de chercher les combinaisons à 3 couleurs identiques, puis à deux couleurs identiques et à 3 couleurs différentes.

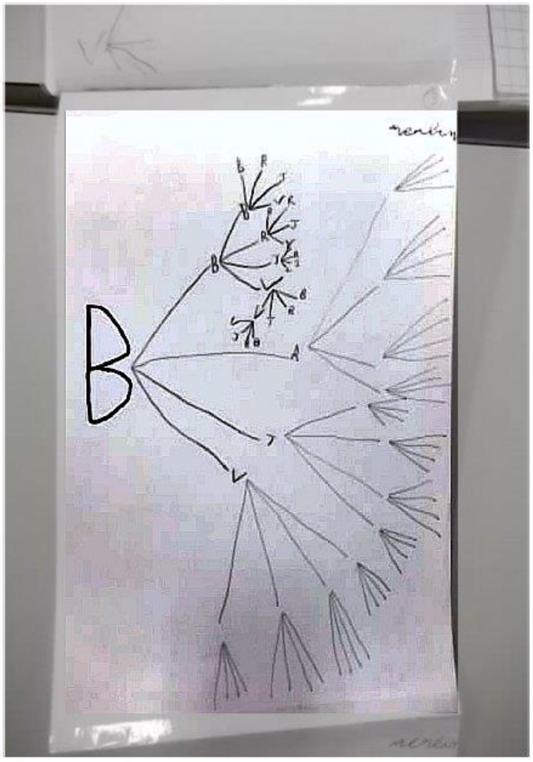
Le maitre introduit une autre technique permettant de chercher l'exhaustivité des combinaisons.

Le « schéma de l'arbre » permet une nouvelle exploration :
Dans le groupe des Bleus, on associe les 3 couleurs de brins, puis pour chaque sous-groupe, à nouveau 3 couleurs.

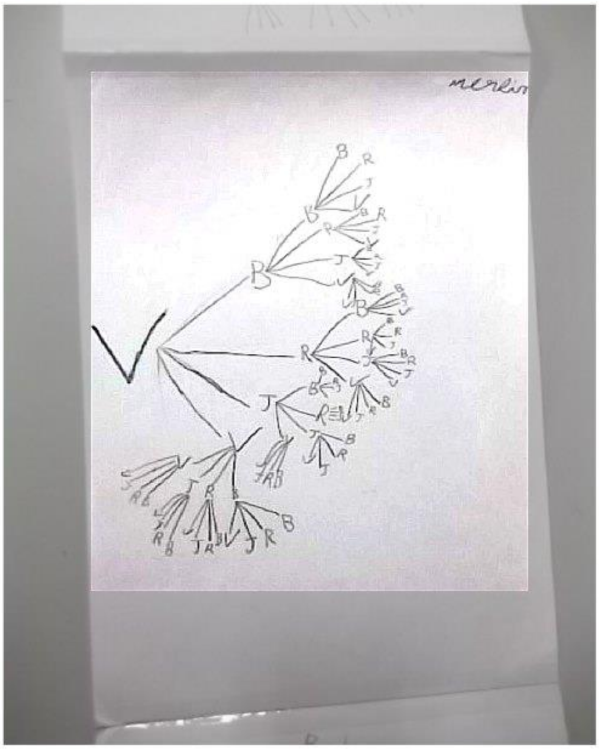
Après plusieurs essais, « l'arbre » permet de vérifier le résultat : nombre de combinaisons à 3 couleurs=3x3x3=27.

Déjà, des élèves se sont lancés dans la recherche à 4 brins de couleurs différentes...
Ils vérifieront alors qu'on trouve 4x4x4x4=256 combinaisons !





Recherche à 4 brins en «schéma de l'arbre » avec aide du maitre.



Même chercheur avec appropriation progressive du « schéma de l'arbre »

Nos remarques

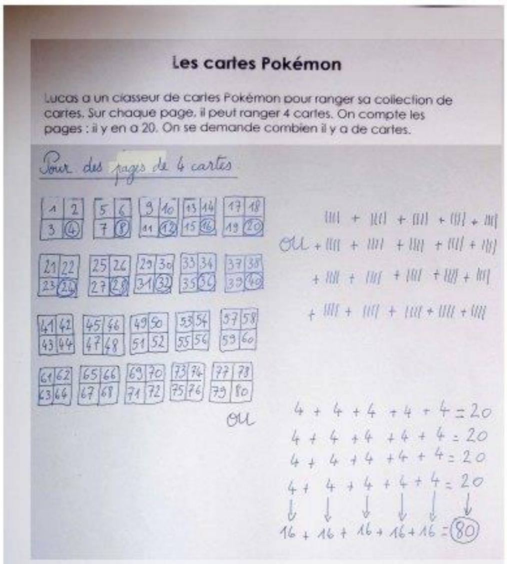
Certains d'entre nous pensent qu'il vaudrait mieux accumuler des situations et des tâtonnements avant d'aller vers une technique experte, d'autres pensent qu'il faut profiter de la situation pour trouver des solutions expertes qu'on pourra réutiliser quand d'autres situations se présenteront. Le débat est ouvert.

Envoi d'Olivier CP/CE1

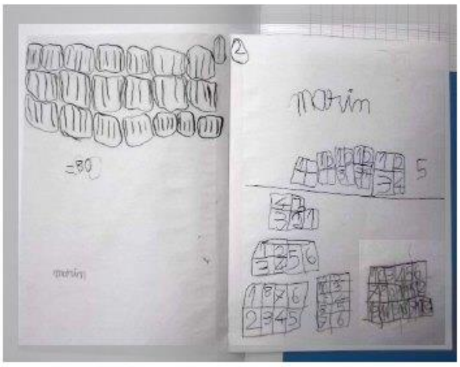
C'est souvent à l'entretien du matin que se déclenchent les situations de recherches, pendant le « Je présente... » mais aussi pendant les autres rituels ou à l'occasion de l'organisation de la journée. Voici quelques exemples de recherches menées à partir de situations authentiques.

Le classeur de cartes-

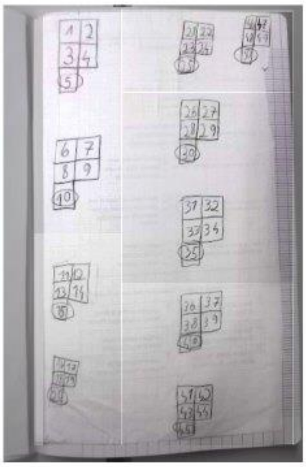
Les enfants cherchent combien de cartes peuvent être rangées dans ce classeur.
Les CP utilisent le dessin.
D'autres (en ce1) sont déjà capables de se servir de l'addition réitérée :
4+4+4+4...
D'autres cherchent plus loin que pour 20 pages.
Puis on se demande comment aller plus loin.
Certains ont l'idée de changer le nombre de pages : classeur de 2 pages, 3 pages ... jusqu'à 9 pages.



On institutionnalise ce qu'on a trouvé.
Ici, on a compté et élaboré une suite numérique de 4 en 4, de 0 jusqu'à 80.
Quelques élèves experts ont aussi montré que
4+4+4+4+4=5x4=20,
que 4+4+4+4=4x4=16
que 20+20+20+20=4x20=80
que 16+16+16+16+16=5x16=80



Recherche de cp pour des pages de 4 cartes puis tentative pour davantage.



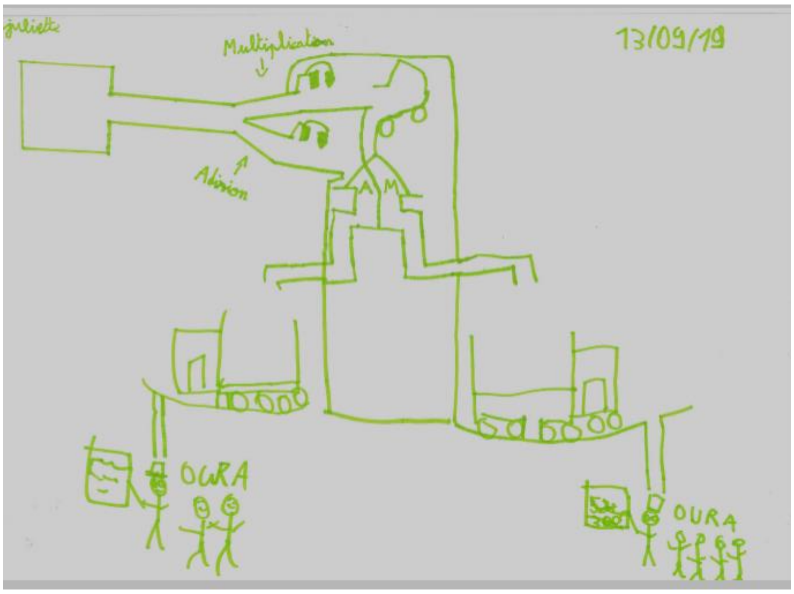
Recherche de ce1 pour des pages de 5 cartes

Demande de Véronique (cycle 3)

Bonjour
Je suis Véronique SONIER. J'ai une classe de CE2/CM1/CM2 en REP+ à Saint-Etienne. J'ai commencé les créations maths et les recherches mathématiques l'année dernière mais je ne suis pas vraiment au point, j'ai encore beaucoup de zones d'ombre dans ma démarche. Nous avons commencé lundi à observer des créations. Il y avait 6 élèves dans l'atelier. Nous avons pu discuter de 4 créations. Mardi j'étais en formation et donc demain nous regarderons les 2 dernières. Auriez-vous des pistes de recherches à me proposer ? Je vous joins les créations des élèves.
Merci beaucoup Véronique

Bonjour Véronique (Réponse de Danielle Thorel)

Merci pour cet apport sur la liste vivamath. Je trouve vraiment les créations de tes élèves très sympathiques et pleines d'inventivité et d'intentions mathématiques. Au début, je suis pour des interventions fortes du maître. Quand il y a une intention visible de l'élève, il ne faut surtout pas passer à côté de cette intelligence qui se manifeste, il faut la respecter et ne pas se perdre dans du vocabulaire de description statique. Tout ça c'est du mouvement, c'est dynamique. Enfin c'est ce que je pense, on peut ne pas être d'accord mais j'ai fait ça pendant des années et ce sont les résultats de mon expérience. C'est pour cela que je me permets d'intervenir et d'essayer de t'aider.
Par exemple, la création de Juliette :

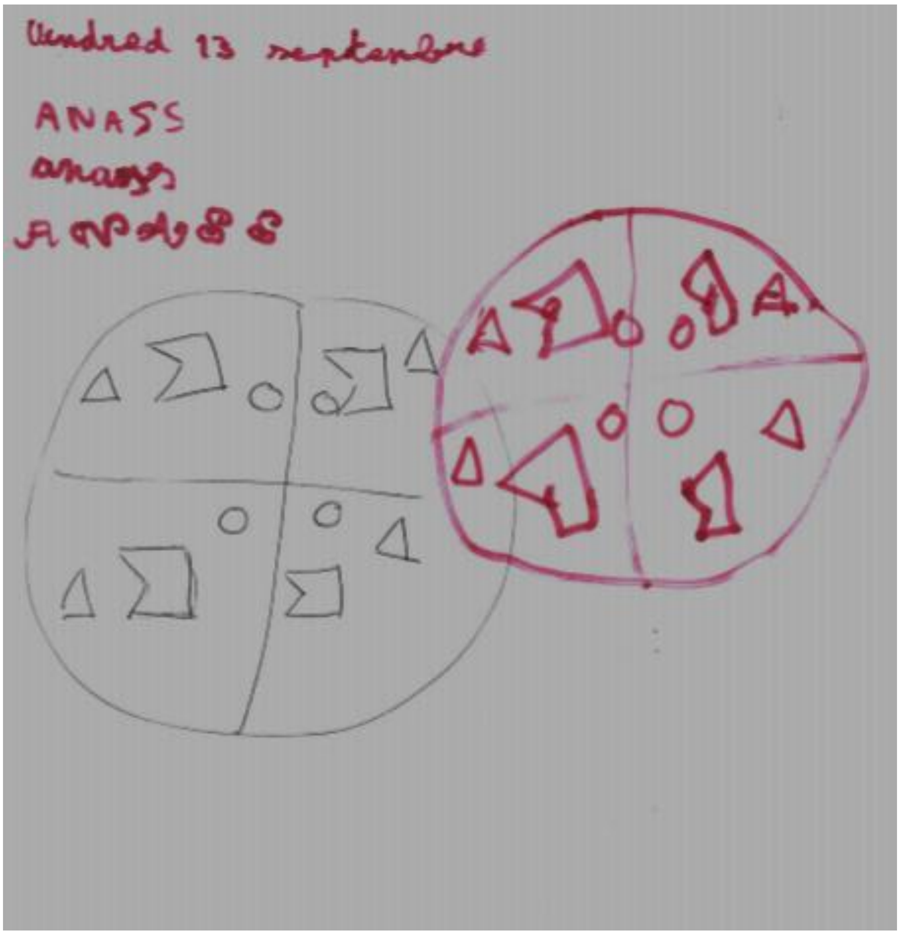


Quelle créativité ! J'adore cette création ! Je pense que, quand il y a une intention évidente, il faut que les autres élèves essaient de la deviner et de regarder l'ensemble au lieu de décrire des détails. Magnifique cette machine : un tuyau pour multiplier, un tuyau pour additionner. Deux bras qui recueillent les résultats et en plus, quand on a réussi on crie « hourra ! ». C'est comme ça que je vois les choses. Il faudrait demander des précisions à Juliette. Alors, entrons deux nombres dans cette machine, par exemple, 4 et 5. Que sort-il par le tuyau de l'addition ? Par celui de la multiplication ? Essayons avec d'autres nombres. Est-ce que le nombre de la multiplication est toujours plus grand que celui de l'addition (débat) ? Et si on fait entrer deux nombres égaux ?

Jouons un peu avec cette machine. Entrons des plus grands nombres pour les CM. Cela permet de réviser ces deux opérations.

Et pourquoi pas y entrer 3 nombres ? Après, comment faire le chemin inverse ? J'ai 36 dans ma boite finale de multiplication. Quels peuvent être les nombres entrés ? Y-a-t-il des nombres qui ne marchent pas (débat) ? 127 par exemple ? Voilà une belle recherche pour des CM (ou même des CE2 s'ils sont costauds, avec des plus petits nombres). On peut jouer à l'infini.

Je ne dis pas qu'il faut prendre toutes ces pistes mais il faut être prêt. Même si, au début, les enfants ne veulent pas chercher il faut montrer de l'enthousiasme et les entraîner. S'ils réussissent une fois, ils y reviendront, ils verront qu'ils en tirent de la gratification et un accroissement de compétences et peut-être pour certains du plaisir !



Là aussi, magnifique ! Regarder l'ensemble et l'intention ! Quel suspens ! On dirait qu'on attend une éclipse totale ! (je sais j'exagère ! et peut-être que les élèves n'en ont rien à faire mais un peu d'enthousiasme ne fait pas de mal !)

Ces deux astres vont-ils se superposer de façon précise ? Comment pourrait-on le savoir ?(débat)

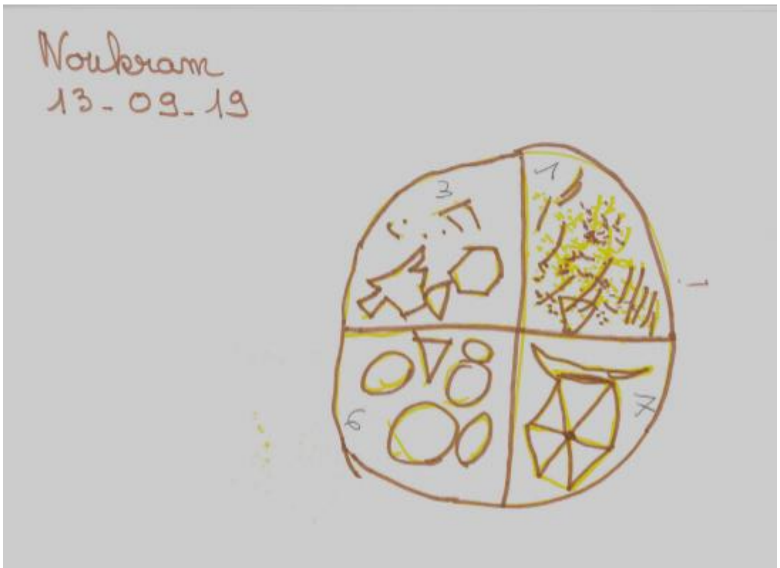
On prend un calque ou même simplement du papier transparent.

Que faudrait-il faire pour qu'ils se superposent exactement ?(débat)

Dessinons une autre figure au tableau. Comment dessiner une autre figure qui va venir se superposer ? Quels outils ? (débat)

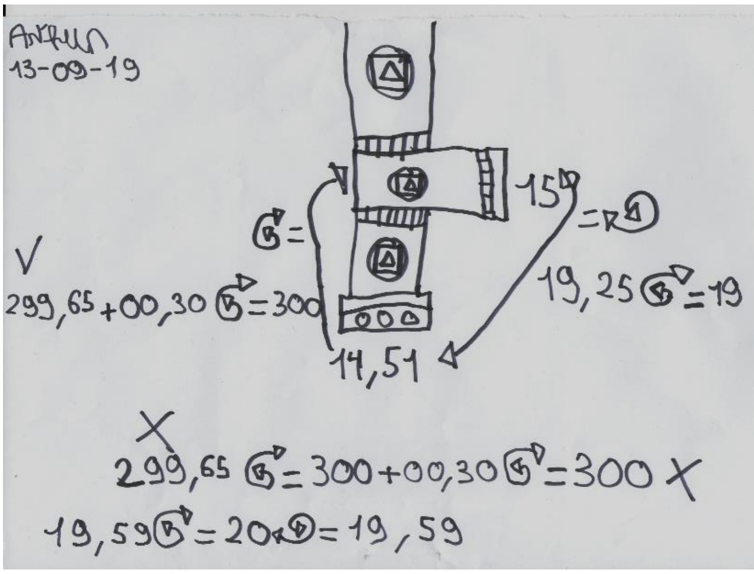
Pour les CM, essayer de le faire sans calque et sans gabarit (par exemple un triangle quelconque). Voilà une belle recherche pour des CM entrecoupée de retour au groupe pour un débat.

Je pense qu'il ne faut pas toujours essayer de nommer les objets mathématiques et ne faire que du vocabulaire.



Les élèves n'ont pas vu les nombres ? 1,3,6,7. Noukram a compté les figures fermées qu'il a dessinées dans les quartiers. On peut demander à Noukram pourquoi 1,3,6,7 ? Si on veut faire le tour : +2,+3,+1, .
Ce serait peut-être bien de prolonger les diamètres et de tracer un autre cercle plus grand concentrique, de faire apparaître de nouveaux quartiers pour continuer sur le même rythme ? Une sorte de cible.

Inventer d'autres cibles.
Peut-être trouver avec les élèves un rythme plus régulier ? +3,+3,+3 ?



Magnifique ! Cette flèche à double sens qui tourne ressemble fort à un opérateur qu'il faut trouver, non ? Il me semble que c'est ce qu'Arthur a voulu faire non ? Même dans cette magnifique machine qui entre 14,51 et sort 15. Appelons cette flèche à double sens « F » (mais avec les élèves gardons la flèche double d'Arthur).

299,65 F= 300 F est +0,35

20 F= 19,59 F est – 0,41

19,25F= 19 F est – 0,25

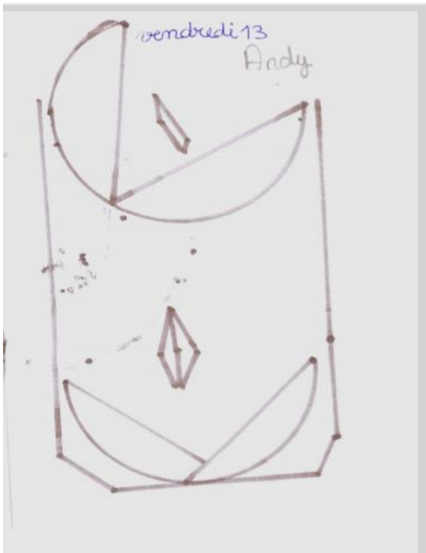
Et même

299,65+00,30 F= 300

De quoi faire avec les CM2 non ?

Hanaé, si on entre dans ton labyrinthe, on ne va pas bien loin, on est tout de suite bloqué et on ne voit qu'une entrée. Et pour passer les barrières, que faut-il faire ? Il n'y a pas de barrière à chacune ?

Comment faire un labyrinthe (ou transformer celui-ci) où on pourrait circuler en faisant des calculs à chaque barrière ? Quelqu'un (ou un groupe) peut-il en faire un et le proposer à la classe ?



Cette forme qui sort de son bocal !

D'abord est-ce la même en bas et en haut (débat) ?
Les bords du bocal sont des droites parallèles. Comment faire une forme qui avance entre deux droites parallèles comme Andy ?

Donner du papier quadrillé et essayer avec un demi-cercle pour simplifier la forme d'Andy, un triangle…

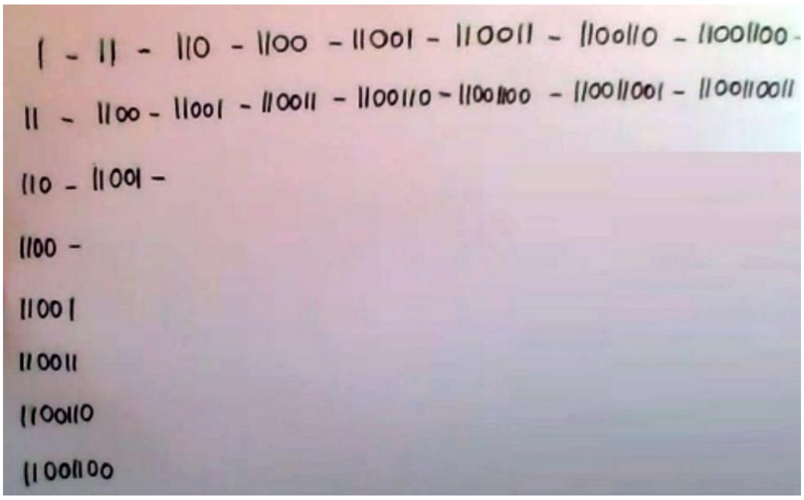
Pour les CM2, essayer sur du papier uni (si tu sens qu'ils peuvent le faire).

Bien-sûr, qu'on ne peut pas faire en une séance tout ce que j'ai écrit. Mais il faut commencer à mettre les enfants en recherche et si certains veulent la continuer, ils la continuent plus tard. D'autres ne seront pas intéressés ou en prendront une autre.
Je pense aussi que les CE2 sont d'un niveau différent des CM2. Alors parfois il faut les séparer et faire des séances de créations qu'avec eux. Il ne faut pas que les CM2 travaillent en dessous de leur possibilités et vice versa.
Bon courage pour la suite.
N'hésite pas à envoyer les superbes créations de tes élèves ! Pour moi, c'est un régal.
Bises Danielle

Nos Visio de coformation

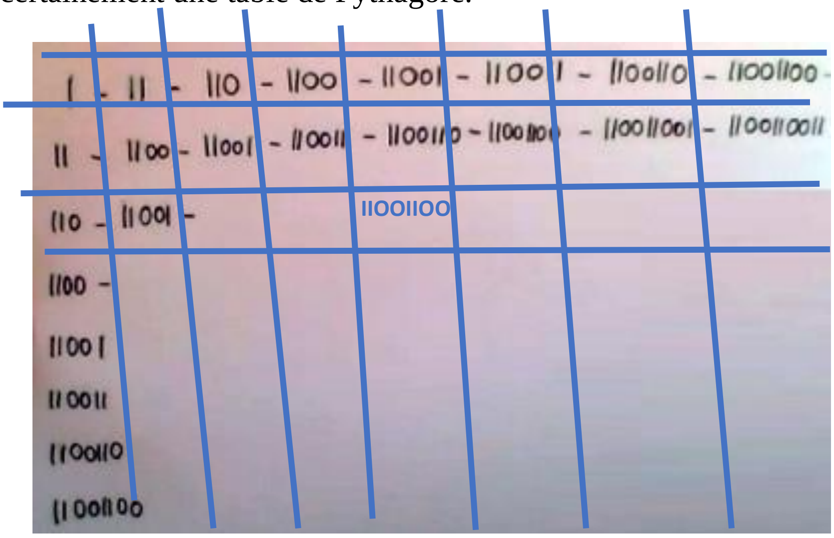
Le 9 octobre 2021 : Se construire une culture mathématique en coformation à partir de créations mathématiques en distanciel
Participants : 12
Animateurs : Rémi Brault, Pierrick Descottes
9h15 : On choisit un thème : les suites.
9h30 : Chacun fait sa création à partir de ce thème.
9h45 : Rémi prend les créations en captures d'écran et les présente en mosaïque sur l'écran de chacun.
10h : Premiers échanges rapides sur chaque création.
10h 10 :

Création de Patricia



Echanges :

- On dirait qu'elle a décomposé un algorithme et qu'elle passe deux étapes à chaque ligne.
- C'est une suite de dessins ou une interprétation en binaire ? Si c'est des nombres écrits en binaire on pourrait essayer de les décoder, en tout cas ce n'est pas une suite en binaire…
- On dirait qu'on a du mal à définir une règle stable…
- Le nombre de symboles dépend du numéro de la ligne et du numéro de la colonne. Essayons… Certains essaient de vérifier cette hypothèse en croisant une ligne et une colonne, ça marche ! C'est certainement une table de Pythagore.



Quelques remarques :
Le premier signe « I » en haut à gauche est mal placé, il faudrait le remplacer par le signe de l'opération (loi de composition) de cette table. La loi de composition qui régit cette table est complexe puisqu'elle fait la somme du nombre de signes et en même temps il faut suivre le rythme de séquence OOII. Comment la symboliser ? « +, IIOO » ?

Notions abordées :

Table de Pythagore

Une table de Pythagore, historiquement, c'est une table de multiplication. C'est étendu à d'autres opérations. Quelle est la différence avec un tableau à double entrée ?

Le tableau à double entrée

On peut également représenter cette relation par *un tableau à deux entrées*, avec en première colonne et en première ligne la liste des éléments de l'ensemble *E*. Les couples sont représentés par des croix dans les cases à l'intersection de la ligne de la première composante et de la colonne de la seconde composante.

	Amélie	Coralie	Hassan	Laurent	Ophélie
Amélie		x	x	x	x
Coralie			x	x	x
Hassan					
Laurent			x		
Ophélie			x	x	

est plus petit que

Loi de composition (voir annexe 2)

4) Et si on ajoutait un signe « W » par exemple ? La suite serait : I II IIO IIOO IIOOW IIOOWW IIOOWWI…

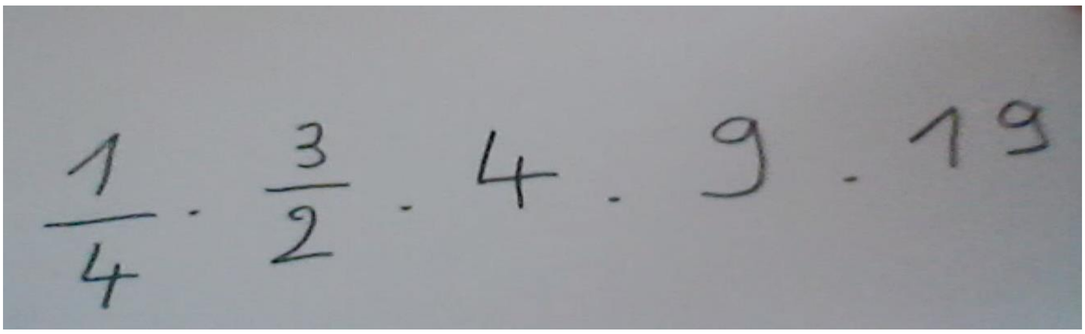
5) Qu'est-ce que ça donnerait avec l'opération X (multiplier) ?
OOIIO **X** II = OOIIOOIIOO
OOIIOOI **X** IIO = OOIIOOIIOOIIOOIIOOIIO
On pourrait faire la table.

6) Pistes proposées par Xavier :
Dans un ensemble constitué des termes de la suite (I - II - IIO - IIOO - ...) (ensemble infini) la création définit une loi de composition interne ("+,IIOO"). Cette loi est-elle commutative ? est-elle associative ? il me semble que oui. Avec d'autres suites du même type a-t-on toujours ces propriétés ? Pas sûr pour l'associativité...

Notion abordée :

Fonction modulo (voir annexe 3)

<u>Création de Danielle</u>



Échanges :

- À première vue on ne voit pas bien comment marche cette suite…
- On pourrait réécrire la suite avec seulement des quarts : $\frac{1}{4}, \frac{6}{4}, \frac{16}{4}, \frac{36}{4}, \frac{76}{4},$

On s'aperçoit que tous les numérateurs se terminent par 6. A partir du numérateur 6, on obtient le suivant en faisant +10 puis +20 puis +40, on trouverait le suivant en faisant +80 ? Le suivant serait donc : $\frac{156}{4}$

Le nombre avant $\frac{1}{4}$ serait $-\frac{3}{8}$?

Et si on transformait tout en nombres qui ne sont pas des fractions ?
0,25 - 1,5 - 4 - 9- 19
On ne trouve pas la règle de cette suite. Danielle nous dit que c'est « multiplier par 2 plus 1 » « x2,+1 ». On vérifie que nos résultats étaient bons.
Pistes proposées par Xavier :
On a une suite arithmético-géométrique. Pour ce genre de suite il existe une formule permettant de trouver directement le terme qu'on veut. Effectivement, on peut remarquer que la suite formée par les différences de deux termes consécutifs est une suite géométrique (pour 0,25 - 1,5 - 4 - 9 - 19 ... ces différences sont 1,25 - 2,5 - 5 - 10 ... qui est une suite géométrique de raison 2). A partir de cette remarque, on devrait pouvoir trouver la formule.

Sinon, vous avez trouvé le terme avant 1/4 en allant "en arrière". Peut-on toujours "aller en arrière". Pour la suite de la création de Patricia, non.

Et si on prend la suite de la création de Danielle et qu'on en fait une table de Pythagore de la même façon que dans création de Patricia, qu'est-ce que cela donne ?

Notions abordées :

Suite arithmétique, suite géométrique (annexe 1)

Suite arithmétique (on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours un même nombre), suite géométrique (on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours un même nombre), suite arithmético-géométrique (on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par un même nombre p, et en ajoutant un autre nombre q).
On peut montrer que la suite des différences entre deux termes successifs d'une suite arithmético-géométrique est une suite géométrique de raison p.
Dans une suite de ce genre, par exemple on multiplie par 3 et on ajoute 2, la suite des différences est multipliée par 3 à chaque fois :
2 8 26 80 …
+6 +18 +64
(L'idée est que l'ajout du 2 s'élimine entre deux termes successifs, il ne reste donc que la multiplication par 3).
Ces trois types de suites sont définies par une relation dite « de récurrence » : on exprime un terme en fonction du précédent. Mais on peut aussi pour chaque type trouver une façon d'exprimer chaque terme en fonction de son rang (voir les articles Wikipédia par exemple).

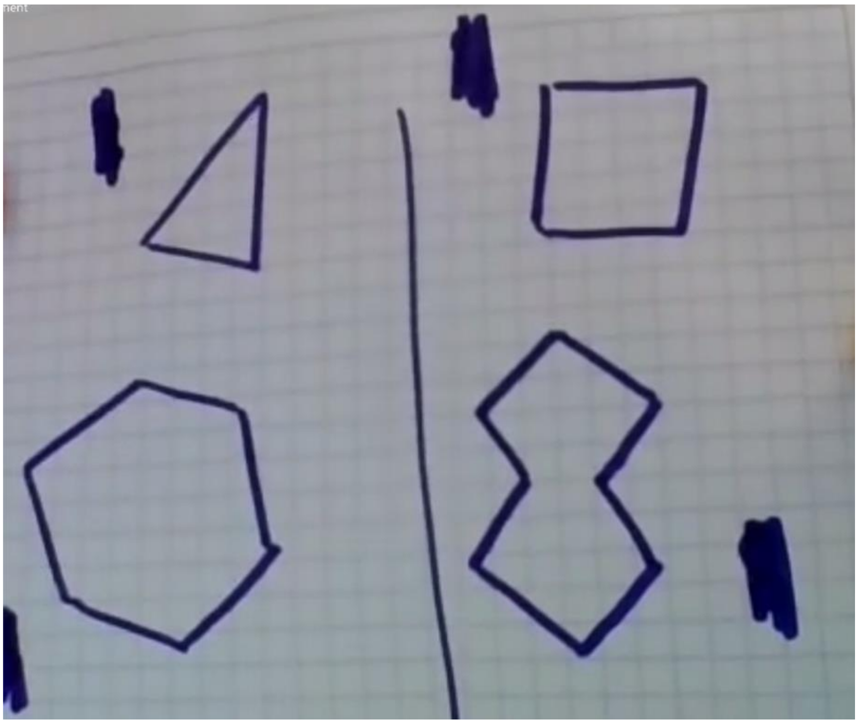
Une telle suite est une suite arithmético-géométrique, de la forme u_{n+1}=p*u_n+q, et pour de telles suites, on peut effectivement montrer que la suite des différences entre deux termes successifs v_n=u_{n+1}-u_n est une suite géométrique de raison p.

Notion de suite

-

On se pose la question « Qu'est-ce qu'une suite ? »
Une suite est ordonnée, on peut dire quel est le premier, le deuxième ou le dixième élément.
- Tout ensemble peut être considéré comme une suite à partir du moment où les éléments sont numérotés (application de N dans E). Un mouton, une maison, 2, 4/5, histoire, Trump, petit... est une suite si on les prend dans un ordre précis – il faut néanmoins que l'on sache de quoi l'on parle pour chaque élément.

Création de Maxime



Échanges :

- Est-ce une suite ? Quel est le premier élément ? Le troisième ?
- Dans chaque colonne, le nombre de côtés est multiplié par 2. Et dans chaque ligne ?

Pistes proposées par Xavier :
Avec un triangle, en le dupliquant et en le déplaçant, on peut faire un quadrilatère (un parallélogramme si on fait coïncider deux côtés, parce qu'un parallélogramme c'est deux triangles "collés").

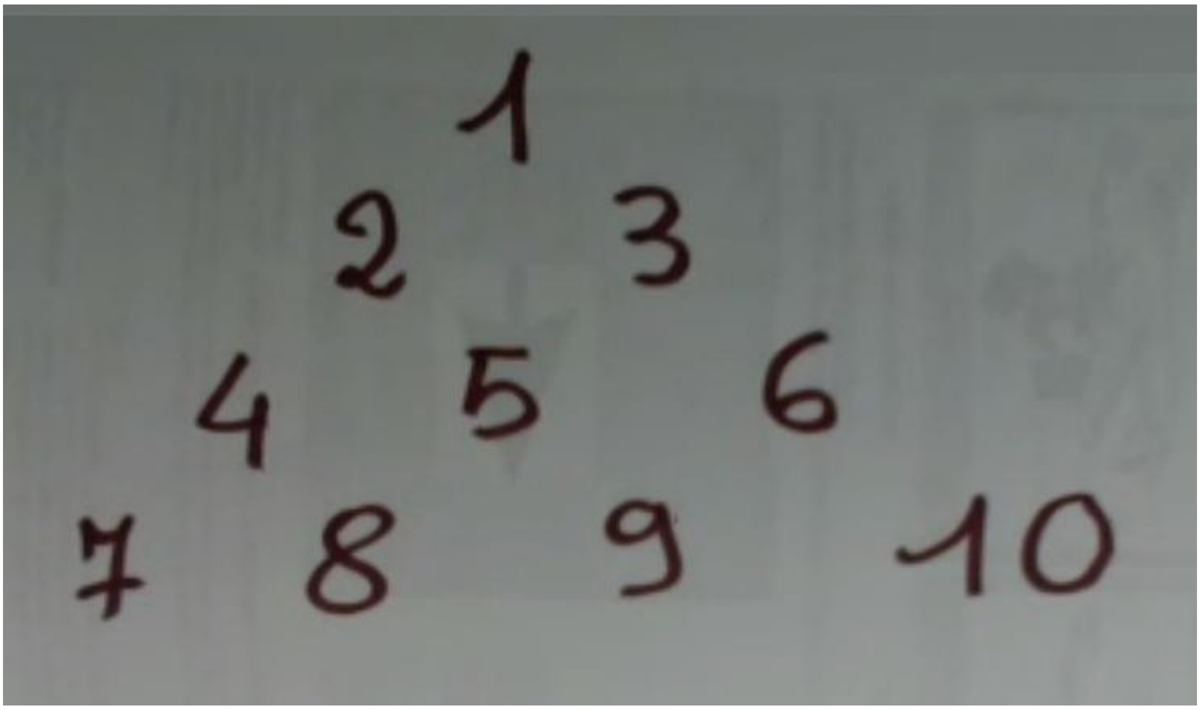
Toujours avec mon triangle dupliqué, si je le mets sur le premier triangle tête-bêche, je peux faire une étoile à 6 branches et quand je relie les sommets cela me fait un hexagone.

Est-ce qu'avec un autre déplacement de mon triangle dupliqué par rapport au premier triangle, je peux faire un pentagone ?

Et avec le carré que je duplique et que je déplace en le laissant chevaucher le premier je peux faire l'octogone en bas à droite. Quelle autre figure peut-on faire avec le carré dupliqué ?

La prochaine réunion aura lieu en Visio le 27 novembre à 9h30.

Une autre création



Commentaires de Xavier :

On voit ici les nombres que les Pythagoriciens appelaient triangulaires (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...).

En disposant les entiers autrement, on peut faire les nombres carrés (en disposant la suite des entiers par couches successives en forme d'équerre autour du 1).

1	2	5
4	3	6
9	8	7

Qu'est-ce que ça donne avec d'autres dispositions ?

Annexe 1 : (extraits « Des références pour une Méthode naturelle de mathématique » *éditions ICEM*)

2.7 LES SUITES DE NOMBRES

Définition en langage ordinaire

On appelle *suite arithmétique* une suite de nombres où l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre (ce nombre est appelé *raison* de la suite arithmétique et est souvent noté r).

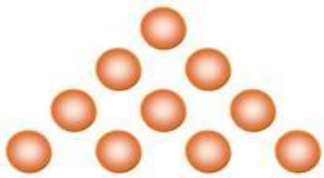
Exemple : suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3 : 2, 5, 8, 11, 14, 17…

On appelle *suite géométrique* une suite de nombres où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre (ce nombre est appelé *raison* de la suite géométrique et est souvent noté q).

Exemple : suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3 : 2, 6, 18, 54…

Exemples de vie

Empilement de billes ou placement des boules de billard dans un triangle :



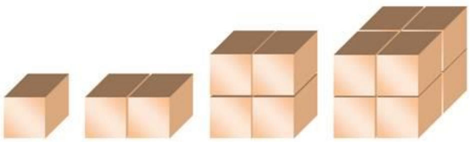
1^er^ empilement : 1 bille

2^e^ empilement : 3 billes

3^e^ empilement : 6 billes

1, 3, 6, 10… est la suite des nombres triangulaires.

Empilement de cubes :



Suite de nombres de cubes :

1, 2, 4, 8, 16…

Il existe de nombreuses suites célèbres. L'une des plus connues est la suite de Fibonacci, qui commence ainsi : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… Ses deux premiers termes sont 0 et 1, et ensuite, chaque terme successif est la somme des deux précédents.

Définition mathématique

Une suite numérique est une famille de nombres U_1, U_2… U_n. Si n n'est pas limité, alors la suite est *infinie*. Elle est *récurrente* si le suivant est calculé à partir du (ou des) précédent(s) : $U_{n+1} = f\,(U_n)$(Une suite peut être également non numérique).

Une suite peut être également définie :

– par la valeur du premier terme ;

– et par une relation de *récurrence*, c'est-à-dire une relation liant plusieurs termes généraux de rangs différents.

Exemple de récurrence :

$$U_0 = 1$$

$$U_{n+1} = 2\,U_n + 1$$

La suite sera alors : 1, 3, 7, 15, 31…

Une suite peut-être également non numérique.

Annexe 2

3.1 LOI DE COMPOSITION NON NUMÉRIQUE

NOTION D’OPÉRATION

Définition en langage ordinaire

Une loi de *composition* non numérique est une façon de *composer* deux objets pour n’en faire qu’un seul. Par exemple, si je mélange du bleu et du rouge, j’obtiens du violet par la *loi de composition* « mélanger » que je peux appeler « *m* ». Je peux alors écrire :

bleu *m* rouge → violet.

Exemples de vie

Tous les évènements où l'on compose deux éléments pour en faire un seul, où l'on décompose un élément en deux autres :

1) Faire des mélanges :

café et lait → café au lait ;

rouge et bleu → violet ;

café et sucre → café sucré.

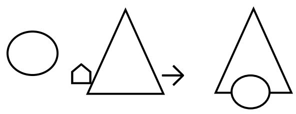
2) Effectuer une suite de deux actions.

Soit les deux actions : appuyer sur l’interrupteur (a), ne pas appuyer sur l’interrupteur (r). On peut composer ces actions par la loi de composition « O » :

$a \mathrm{O} r \to a \qquad a \mathrm{O} a \to r \qquad r \mathrm{O} r \to r$

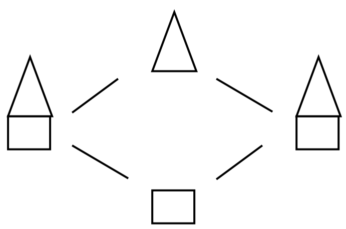
Autres exemples analogues : retourner sa chaussette (a), ne rien faire (r) ; appuyer sur le bouton du stylo (a), ne rien faire (r).

3) Associer deux figures pour en créer une troisième.



L’opération ⌂ met le premier élément à l’intérieur du deuxième.

4) Décomposer un objet en deux éléments pour les recomposer ensuite…



… et opérer la même composition avec d’autres éléments.

Définition mathématique

Une loi de composition interne dans un ensemble *E* ou, plus simplement, une loi dans *E*, est une *opération* qui donne un *résultat* dans *E* pour tous les couples possibles des éléments de *E*.

3.2 LOI DE COMPOSITION NUMÉRIQUE INTERNE

Définition en langage ordinaire

À l'école élémentaire, les « lois de composition interne numériques » sont principalement ce que nous appelons couramment « les opérations ». Pourquoi « loi de *composition* » ? Parce qu'elle *compose* deux nombres pour n'en donner qu'un. Par exemple, la « loi de composition » symbolisée par « + (plus) » peut composer deux nombres de $\mathbb{N}$, 4 et 6, pour les associer au nombre 10.

Pourquoi « loi de composition *interne* » ? Parce que cette loi s'applique dans un ensemble et un seul. Les nombres 4 et 6 sont des nombres naturels, en les composant on obtient aussi un nombre naturel : 10.

Exemples de vie

Les exemples de vie qui mettent en jeu ces quatre opérations sont nombreux et présents dans tous les manuels scolaires ou fichiers de problèmes. Dans les *Situations de classe* qui suivent, nous privilégions les recherches de techniques opératoires. Certaines recherches peuvent avoir leur origine dans des problèmes de la vie courante.

Définition mathématique

Une loi de composition interne dans un ensemble *E* est une *opération* qui donne un *résultat* dans *E* pour tous les couples possibles d'éléments de *E* .

On peut la voir aussi comme une fonction qui, à un couple d'éléments, associe un seul élément. Exemple : $3 + 2 = 5$

$(3, 2) \rightarrow 5$

Par la loi « + », à un couple on fait correspondre un nombre.

On peut la noter ainsi : $f \colon E^2 \rightarrow E$

$(a, b) \rightarrow a + b$

Les quatre opérations : addition, multiplication, soustraction, division, sont des lois de composition interne dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{R}$.

L'addition est l'opération mathématique qui, à deux ou plusieurs nombres appelés termes, associe leur somme.

La soustraction est l'opération mathématique qui, à deux nombres, associe leur différence (dans la vie courante, on parle parfois de *reste*). Pour cette opération, on utilise les expressions « premier terme » et « second terme » de l'opération. C'est l'opération inverse de l'addition ; si $a + b = c$, alors $b = c - a$ et $a = c - b$.

La multiplication est l'opération mathématique qui, à deux ou plusieurs nombres appelés facteurs, associe leur produit.

La division euclidienne, ou division de nombres naturels, est l'opération mathématique qui, à deux nombres a (appelé le dividende) et b (appelé le diviseur), associe un autre couple de nombres, leur quotient q et leur reste r. On la note $a \div b$ ou $a : b = q\ (+\ r)$. Les nombres q et r sont tels que $a = b \times q + r$ avec $r < b$ et $b \neq 0$. C'est l'opération inverse de la multiplication.

Annexe 3

2.5 FONCTION NUMÉRIQUE MODULO

Définition en langage ordinaire

Que signifie : « $13 \equiv 1$ modulo 3 » ? (Le signe « $\equiv$ » se lit « est congru à ».)

Le reste de la division de 13 par 3 est 1. Cela veut dire que 13 est associé à 1 par la fonction modulo 3. On dit que « 13 est congru à 1 modulo 3 ».

Le reste de la division de 70 par 3 est aussi 1. On peut dire que 70 est congru à 13 modulo 3 parce que 13 et 70 ont le même reste dans la division par 3.

On écrit : $70 \equiv 13 \equiv 1$ modulo 3.

Tous les nombres congrus à 1 modulo 3 forment une classe d'équivalence dans $\mathbb{N}$. La congruence est une relation d'équivalence compatible avec les quatre opérations : addition, soustraction, multiplication, division (sous certaines conditions) dans $\mathbb{N}$.

Exemples de vie

1) Tout ce qui est cyclique : heures, jours, saisons, horloges graduées, etc.

Si nous sommes mercredi, quel jour serons-nous dans 45 jours ? J'utilise le reste de la division de 45 par 7 (7 jours dans la semaine) pour savoir le nombre de jours qu'il faut ajouter après mercredi. Le reste de la division de 45 par 7 est 3. Je compte trois jours de plus à partir de mercredi, ce qui m'indique samedi. Dans 45 jours, nous serons samedi.

Dans 73 jours, dans 150 jours, dans 24 jours, nous serons aussi samedi parce que tous ces nombres donnent 3 comme reste dans la division par 7. C'est la fonction modulo 7 qui est en jeu ici.

Pour les heures, ce sera la fonction modulo 12. Pour les saisons, la fonction modulo 4.

2) On utilise les propriétés de la fonction modulo 9 pour faire « la preuve des opérations », on l'appelle « la preuve par 9 » (« faire la preuve » d'une opération signifie : prouver que le résultat est juste).

En effet, pour connaitre le reste de la division par 9 d'un nombre, il suffit d'ajouter les chiffres qui composent ce nombre jusqu'à obtenir un nombre d'un chiffre.

Le reste de la division de 16 par 9 est 7. Pour trouver ce reste, j'additionne les chiffres du nombre 16 : $1 + 6 = 7$.

Le reste de la division de 188 par 9 est 8. J'additionne les chiffres du nombre 188 : $1 + 8 + 8 = 17$ et $1 + 7 = 8$.

D'autre part, les fonctions modulo f possèdent les propriétés suivantes :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad f(x\,y) = f(x)\,f(y)$$

On peut donc faire la preuve de différentes opérations en utilisant ces propriétés :

$188 + 16 = 204 \rightarrow 2 + 0 + 4 = 6$ $\qquad$ $188 \times 16 = 3008 \rightarrow 3 + 0 + 0 + 8 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$

$8 + 7 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6$ $\qquad$ $8 \times 7 = 56 \rightarrow 5 + 6 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$

Définition mathématique

Le modulo est une fonction numérique qui, au couple $(a,\ b)$ d'entiers, associe le reste *r* de la division euclidienne de a par b. Soit *n* un entier naturel non nul, a et b sont congrus modulo *n* si, et seulement si, a et b ont le même reste dans la division par *n*. On écrit $a \equiv b$ modulo *n* ou $a \equiv b$ (*n*).